

Москалев П.В.
Шитов В.В.

Теоретическое моделирование пористых структур



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 532.546 + 62-405.8

ББК 22.253

М 82

Москалев П. В., Шитов В. В. **Математическое моделирование пористых структур.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 120 с. — ISBN 978-5-9221-0818-8.

Монография посвящена теоретическим исследованиям в области моделирования внутренней структуры и процессов нелинейной фильтрации однородных жидкостей в насыщенной капиллярно-пористой среде. Излагаются сведения об основных феноменологических закономерностях процессов переноса массы, методах оценки эффективных показателей и эмпирических характеристиках пористой среды. Рассматриваются методы моделирования, связанные с формированием фрактальных пространственно-временных структур и процессов с хаотической динамикой в макроскопически изотропной пористой среде. Приводятся некоторые аналитические и численные методы и примеры решения краевых задач теории фильтрации в областях с различной конфигурацией.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, занимающихся исследованиями в области моделирования внутренней структуры, теории фильтрации и теплообмена в пористой среде.

Научное издание

МОСКАЛЕВ Павел Валентинович

ШИТОВ Виктор Васильевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОРИСТЫХ СТРУКТУР

Редактор *Е.С. Артоболевская*

Оригинал-макет: *Ю.В. Владимирова*

Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 13.03.07. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 7,5. Уч.-изд. л. 9. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;

<http://www.fml.ru>

ISBN 978-5-9221-0818-8



9 785922 108188

Отпечатано с готовых диапозитивов

в ОАО «Марийский полиграфическо-издательский комбинат»

424002, г. Йошкар-Ола, ул. Комсомольская, 112

© ФИЗМАТЛИТ, 2007

ISBN 978-5-9221-0818-8

© П. В. Москалев, В. В. Шитов, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1. Феноменологические модели пористой среды	10
1.1. Эффективные показатели пористой среды	10
1.1.1. Методы осреднения показателей в пористой среде (11).	
1.1.2. Основные эмпирические показатели пористой среды (15).	
1.2. Основные закономерности в теории фильтрации	17
1.2.1. Границы применимости линейного закона фильтрации (17).	
1.2.2. Моделирование нелинейной фильтрации (20).	
1.3. Моделирование нелинейной фильтрации при степенном законе сопротивления	23
1.3.1. Вывод системы уравнений нелинейной фильтрации (24).	
1.3.2. Построение частного решения уравнения Клейна–Гордона методом Винера–Хопфа (26).	
1.4. Краевые задачи нелинейной фильтрации при степенном законе сопротивления	30
1.4.1. Построение области фильтрации и граничных условий (31).	
1.4.2. Отыскание решения краевой задачи в области изображений (32).	
1.4.3. Переход к решению краевой задачи в области переменных Чаплыгина (34).	
Глава 2. Структурные модели пористой среды	37
2.1. Капиллярные модели пористой среды	39
2.1.1. Системы капилляров постоянного сечения (39).	
2.1.2. Системы капилляров переменного сечения (40).	
2.1.3. Регулярные сетевые системы капилляров (42).	
2.2. Матричные модели пористой среды	44
2.2.1. Регулярные системы сферических частиц (44).	
2.2.2. Регулярные системы деформируемых частиц (45).	
2.3. Стохастические модели пористой среды	47
2.3.1. Распределение размеров в пористой среде (47).	
2.3.2. Стохастические системы капилляров (48).	
2.3.3. Стохастические системы частиц (50).	
2.4. Классификация структурных моделей пористой среды	52
2.4.1. Связность структуры (52).	
2.4.2. Непрерывность структуры (53).	
2.4.3. Фазовое состояние структуры (53).	
2.4.4. Размерность структуры (54).	
2.4.5. Регулярность структуры (54).	
2.4.6. Анизотропность структуры (55).	
Глава 3. Моделирование стохастических процессов	57
3.1. Характеристики стохастических процессов	58
3.1.1. Топологическая размерность (58).	
3.1.2. Размерность Хаусдорфа (59).	
3.1.3. Самоподобие и самоаффинность (60).	
3.1.4. Размерность Минковского (62).	
3.1.5. Информационная размерность (63).	
3.1.6. Корреляционная размерность (64).	
3.1.7. Обобщенные размерности (65).	
3.2. Моделирование броуновского движения	66
3.2.1. Обыкновенное броуновское движение (67).	
3.2.2. Фрактальное броуновское движение (71).	
3.3. Последовательные случайные сложения	74
3.3.1. Стандартный алгоритм Фосса (74).	
3.3.2. Обобщенный алгоритм Фосса (79).	

3.4. Моделирование процесса перколяции	82
3.4.1. Основные показатели процесса перколяции (84).	
3.4.2. Построение и анализ структуры перколяционного кластера (86).	
3.4.3. Направленная и градиентная перколяция (92).	
Заключение	96
Приложение А. Листинги программ	97
А.1. Стандартный алгоритм Фосса	97
А.2. Обобщенный алгоритм Фосса	98
А.3. Моделирование процесса перколяции	100
Список литературы	113

ПРЕДИСЛОВИЕ

Характерной чертой современного этапа развития прикладной науки является все более интенсивное применение компьютерных технологий в самых разных видах научных исследований. Одним из примеров такого рода является теория фильтрации, изучающая закономерности движения жидкостей и газов в проницаемых структурах.

К середине XX в. теория фильтрации считалась в основном сложившейся областью прикладной гидродинамики. Но некоторые вопросы требовали более подробного исследования. В частности, оставалась неясной природа многочисленных феноменологических законов сопротивления, которые, как было выяснено еще на этапе становления теории, могли иметь ярко выраженный нелинейный характер. В общих чертах было ясно, что ответ на этот вопрос лежит в области микромеханики течения жидкости в пористой среде, которая выходит за рамки любых феноменологических теорий. Приведенный в первой главе настоящей монографии пример исследования нелинейной фильтрации в рамках классической феноменологической модели ясно демонстрирует трудности, возникающие на этом пути.

Внимательное изучение подходов, предлагавшихся исследователями для решения данной проблемы, привело авторов к мысли о необходимости классификации всего многообразия структурных моделей пористой среды. В основу данной классификации был положен известный принцип объединения различных моделей в группы на основе иерархически организованной системы признаков, характеризующих наиболее значимые особенности пористой среды. Как показывает анализ данной классификации, к одной из основных характеристик пористой среды относится уровень ее регулярности.

Вообще, наличие локальных флуктуаций является характерной чертой, отличающей на микроуровне течения сплошных сред от фильтрационных течений даже в строго регулярных структурах. В случае же стохастических структур появление хаотических режимов в фазовом пространстве такой системы практически неизбежно. Необходимость универсального подхода для описания чрезвычайно сложной структуры хаотических аттракторов потребовала подробного анализа таких понятий, как самоподобие и размерность фрактальных объектов.

В связи с задачей моделирования стохастических фракталов в третьей главе предложено важное обобщение рекурсивного алгоритма случайных сложений для общего вида функций распределения сред-

него квадратического отклонения и численности точек определения в зависимости от разрешения фрактальной функции. Анализ данного алгоритма указывает на возможность порождения как гладкой, так и фрактальной функции в результате единого итерационного процесса.

Перколяционные модели распространения жидкости в пористых структурах позволяют с помощью простейших закономерностей смоделировать задачу о микроструктуре неустановившегося режима фильтрационного течения, чрезвычайно сложную в рассмотрении с помощью традиционных методов моделирования. Последний раздел третьей главы посвящен подробной разработке алгоритмов построения и анализа кластеров в рамках задачи некоррелированной перколяции. К числу существенно новых следует отнести модель градиентной перколяции, позволяющей в достаточно простой форме описать микроструктуру фильтрационного течения в анизотропной пористой среде.

Подводя итог, нельзя не отметить, что объединение новых идей, изложенных в данной работе, позволит в дальнейшем перейти от рассмотрения ряда частных задач к теории обобщенной перколяции на фрактальных множествах для построения более адекватного описания процессов массопереноса в пористой среде.

*Заслуженный работник науки,
доктор технических наук, профессор И.В. Золотухин,
Воронежский государственный технический университет,
кафедра физики твердого тела.*

ВВЕДЕНИЕ

Исследования процессов конвективного тепло- и массопереноса в насыщенных пористых средах традиционно занимают одно из центральных мест среди современных проблем теоретической теплофизики. Это обусловлено прежде всего актуальностью изучения внутренних механизмов переноса массы и энергии в пористой среде, включая прогнозы и оценку эффективности применения пористых материалов в различных областях техники и технологии.

Первой публикацией, сформулировавшей проблему изучения особенностей макроскопического переноса массы в пористой среде, был обширный отчет об экспериментальных исследованиях выпускника Политехнической школы, французского инженера Г. Дарси, изданный в Париже в середине XIX в. [81]. Годом позже Дарси опубликовал теоретическую работу с анализом экспериментальных данных и выводом известного соотношения между скоростью течения жидкости и градиентом давления (или напора) в проницаемой среде, названного впоследствии его именем [82]. Фундаментальность подхода и подробный анализ поставленных вопросов в этих работах создали прочный базис для нового раздела гидродинамики — теории фильтрации жидкостей и газов в капиллярно-пористой среде.

Становление нового направления на рубеже XIX–XX веков тесно связано с трудами Ж. Дюпюи [88], Ф.Г. Кинга [125], С.С. Сликтера [162], П. Форхгеймера [102], Н.Н. Павловского [36], Дж. Козени [130], Г.Г. Фэнчера и Дж.А. Льюиса [96], Н.Е. Жуковского [16], П.С. Кармана [77], М. Маскета [146], С.А. Христиановича [50] и Л.С. Лейбензона [27].

Большой вклад в формирование современной теории фильтрации в насыщенной пористой среде был сделан благодаря исследованиям С. Эргуна [92], В.И. Аравина и С.Н. Нумерова [2], В.Н. Николаевского [31–33], А.Е. Шейдеггера [52], Д.А. Эфроса [63], Р. Коллинза [21], В.М. Ентова [4, 14, 15], П.Я. Полубариновой–Кочиной [38], Ф.А. Дюллиена [86], М.И. Швидлера [53] и многих других отечественных и зарубежных ученых.

За последние пять лет, по данным одного из ведущих издательств научно-технической литературы «Elsevier» [90], в мировой периодической печати было опубликовано свыше 80 000 научных работ, посвященных исследованиям пористых структур.

Следует отметить, что настоящая работа не претендует на обобщение столь значительного массива публикаций. Авторы в пределах сравнительно небольшого объема книги сделали попытку систематически изложить такой материал, который явился бы существенным дополнением к уже опубликованным исследованиям по указанной выше весьма широкой проблеме. Оригинальные или недостаточно широко освещенные результаты представлены более детально, а сопутствующая информация отражена в тезисной форме.

В первой главе излагается феноменологический подход к моделированию пористой среды. Вначале рассматривается связь феноменологических законов с гипотезой сплошности и описываются методы осреднения показателей в пористой среде. Далее формулируются основные закономерности, выявленные при аппроксимации результатов экспериментальных исследований процесса фильтрации. Раздел 1.3 посвящен выводу основных соотношений и построению частного решения задачи нелинейной фильтрации в симметричной клиновидной области с использованием феноменологического подхода. Первоначальная постановка и методика решения данного класса задач были разработаны в 70-е годы XX в. видным ученым воронежской школы прикладной гидродинамики В.И. Ворониным [10, 11, 13]. Последующее развитие данного метода нашло отражение в работах профессора В.В. Шитова [12, 54, 56], материалы которые и легли в основу данного раздела.

Во второй главе исследуется структурный подход в моделировании пористой среды. Историческое разделение структурных моделей на капиллярные и матричные привело к появлению значительного числа их модификаций, учитывающих индивидуальные особенности задач, решаемых при моделировании. В то же время анализ показывает, что число параметров, принципиально важных для описания различий между отдельными моделями пористых структур, сравнительно невелико. Это обстоятельство позволило авторам предложить в разделе 2.4 новую систему классификации теоретических моделей пористых структур на основе системы из шести признаков, объединенных в две группы: а) связность, непрерывность и фазовое состояние структурных единиц, а также б) размерность, анизотропность и регулярность полученной из них структуры. Безусловно, предложенная классификация не идеальна и способна вызвать множество вопросов, но даже она показывает, что к одной из основных характеристик пористой среды следует отнести уровень ее регулярности.

В третьей главе описаны подходы, применяющиеся для моделирования стохастических процессов. Учет стохастичности реальной пористой среды на любом уровне теоретической модели приводит к необходимости анализа характеристик самоподобия и размерности фрактальной структуры. Основные идеи такого анализа проиллюстрированы на примере хорошо изученного броуновского движения, моделируемого с помощью стационарного стохастического процесса с независимыми приращениями. Обобщение броуновского движения на случай зави-

симых приращений приводит к процессу, известному под названием фрактального броуновского движения.

В разделе 3.3 описывается одна из наиболее эффективных рекурсивных процедур, применяющихся для формирования фрактальной броуновской функции в пространстве произвольной размерности, названной Р. Фоссом алгоритмом случайных сложений [170]. Попытки использования указанной процедуры для формирования распределения характеристик реальной пористой среды привели авторов к необходимости ее обобщения в разделе 3.3.2 на случай произвольных функций распределения управляющих параметров на различных масштабных уровнях [57, 58].

Раздел 3.4 посвящен вопросам моделирования перколяционного процесса, тесно связанного, как показывает исследование, с броуновским движением. Основные особенности анализа перколяционного процесса рассматриваются на примере некоррелированной перколяции для плоской регулярной четырехсвязной решетки. Заметим, что все изложенные подходы допускают вполне тривиальное обобщение на случай трех и более пространственных измерений. Одним из существенных упрощений, присутствующих в большинстве перколяционных моделей, является ненаправленный характер перколяции. В более реалистичных случаях характер распространения жидкости в различных направлениях неодинаков, что приводит нас к интересному обобщению модели некоррелированной перколяции, названной авторами «градиентной перколяцией».

Авторы искренне надеются, что настоящая работа будет полезна всем специалистам, интересующимся современными проблемами теории фильтрации и тепломассопереноса в пористых средах и будет представлять несомненный интерес для студентов и аспирантов естественно-научных и прикладных специальностей, связанных с исследованием пористых материалов.

*Доктор технических наук, профессор В. В. Шитов,
Воронежская государственная технологическая академия,
кафедра промышленной энергетики;*

*кандидат технических наук, доцент П. В. Москалев,
Воронежский государственный аграрный университет,
кафедра высшей математики и теоретической механики.*

Глава 1

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

В настоящее время в гидро- и термодинамике пористой среды различные потоки часто выражают феноменологически с помощью линейных уравнений вида

$$J = k \cdot X, \quad (1.1)$$

где J — интенсивность соответствующего потока; k — коэффициент переноса массы или энергии в данном потоке; X — обобщенная движущая сила, вызывающая перенос.

Следует заметить, что выразить математически фильтрационный или диффузионный поток так, чтобы формулы отражали реальное перемещение частиц флюида по поровому пространству крайне затруднительно. Как правило, в прикладных исследованиях основной интерес представляют макроскопические особенности того или иного процесса переноса. Микроскопические же детали интересны лишь в той мере, в которой они способны повлиять на общую картину процесса. С этой точки зрения формулы вида (1.1) описывают процессы переноса как единое движение фиктивной сплошной среды через некоторое пространство, занимаемое в действительности пористой средой. Подобная идеализация весьма плодотворна, так как благодаря простоте математической записи она представляет очень широкие возможности для моделирования разнообразных ситуаций [26, 43]. Однако необходимо помнить, что уравнение вида (1.1) описывает модельную картину, основанную на гипотезе сплошной среды и имеющую вполне определенные ограничения.

1.1. Эффективные показатели пористой среды

Практическое применение гипотезы сплошности в задачах переноса в пористых средах приводит к проблеме выбора величины элементарного репрезентативного объема. С одной стороны, этот объем должен быть достаточно малым по сравнению с размерами пористого тела, чтобы обеспечивать допустимую погрешность при аппроксимации дифференциального объема фиктивной сплошной среды. С другой стороны, он должен быть достаточно велик, чтобы при осреднении обеспечивать

такие же макроскопические характеристики, что и пористая среда в целом с заданным уровнем достоверной вероятности.

Заметим, что при наличии макроскопической анизотропии помимо величины элементарного репрезентативного объема также должны быть выбраны и другие его геометрические показатели с учетом инвариантности тензоров его физических характеристик относительно пористой среды в целом. В декартовой прямоугольной системе координат (x, y, z) тензор соответствующей характеристики может быть записан с помощью квадратной матрицы третьего порядка

$$\overline{K} = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где индексы « x », « y », « z » относятся к одноименным осям системы координат. Если же оси системы координат выбираются сонаправленными с главными осями тензора, то матрица (1.2) принимает диагональный вид, позволяющий для изотропной пористой среды полностью описать указанную характеристику с помощью скалярного множителя k

$$\overline{K} = k E_3, \quad (1.3)$$

где E_3 — единичная матрица третьего порядка.

Принципиальной особенностью феноменологических соотношений является их детерминированно-стохастический характер. Форма уравнения вида (1.1) с учетом тензорного описания коэффициента k в форме (1.2), (1.3) детерминированно связывает параметры переноса. В то же время методика определения этого коэффициента базируется на статистической оценке параметров фиктивной сплошной среды с использованием понятия элементарного репрезентативного объема. При этом величина коэффициента k оказывается зависящей как от текущего масштаба, так и от методики выбора и способа осреднения параметров элементарного объема.

На рис. 1.1 показаны микрофотографии образцов пористых материалов, полученных из высокотеплопроводных материалов с помощью различных технологий. На фотографиях видно, что особенности структуры, а следовательно, и распределение физических характеристик для этих материалов может существенно различаться. В связи с этим вопрос о выборе методики осреднения в пористых средах принимает принципиальное значение.

1.1.1. Методы осреднения показателей в пористой среде. В общем виде пространственно-временное осреднение непрерывной, ограниченной на D функции $u(x, y, z, t)$ определяется как четырехкратный интеграл [30]

$$\overline{u(x, y, z, t)} = \int \int \int \int_D u(x - \varepsilon_x, y - \varepsilon_y, z - \varepsilon_z, t - \tau) \times$$

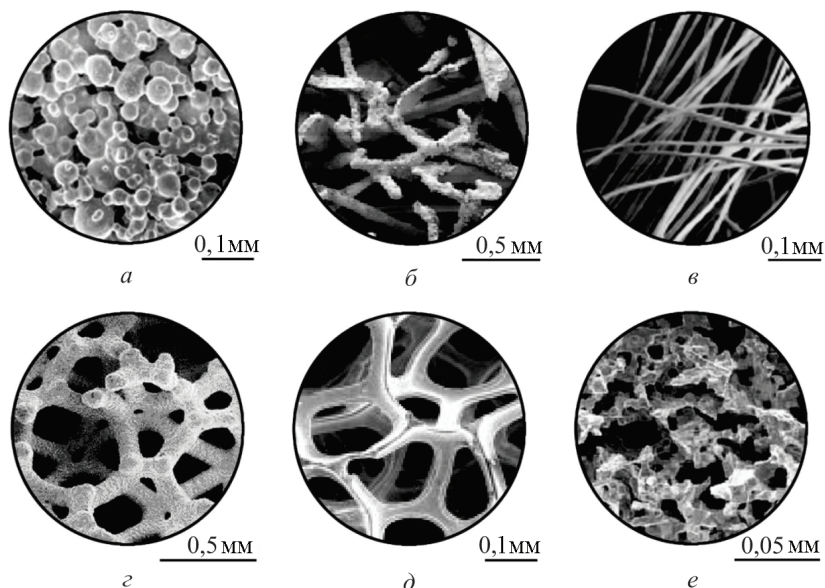


Рис. 1.1. Микрофотографии образцов различных пористых материалов: а) капельная микроструктура пористого материала из никель-хром-молибденового сплава [148]; б) волокнистый пористый материал из никель-алюминиевого сплава [75]; в) пористый материал из углеродного волокна [93]; г) пористый вольфрам с вспененной структурой [149]; д) пористый никель с вспененной структурой [166]; е) пористый алюминий с ячеистой пеноподобной структурой [84]

$$\times \omega(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \tau) d\varepsilon_x d\varepsilon_y d\varepsilon_z d\tau, \quad (1.4)$$

где $\omega(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \tau)$ — некоторая весовая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\omega(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \tau) \geq 0, \quad \int \int \int \int_D \omega(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \tau) d\varepsilon_x d\varepsilon_y d\varepsilon_z d\tau = 1. \quad (1.5)$$

В простейшем случае предполагают, что весовая функция ω равна нулю за пределами некоторой замкнутой ограниченной области S пространства независимых переменных x, y, z, t и принимает постоянное значение внутри нее. В этом случае выражение (1.4) с учетом условий (1.5) будет эквивалентно формуле математического ожидания равномерно распределенной случайной величины $U = u(x, y, z, t)$, где роль функции плотности распределения вероятности будет играть функция $\omega = \text{const}$ при $(x, y, z, t) \in S$.

Заметим, что последний вывод сохраняется и для произвольного вида весовой функции при сохранении условий (1.5). Очевидно, одна-

ко, что результат осреднения будет сильно зависеть не только от вида функции $\omega(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \tau)$, но и от геометрии области S , соответствующей в нашем случае элементарному репрезентативному объему пористой среды.

В статистической гидромеханике в качестве дополнительных критериев при осреднении турбулентных гидродинамических полей применяются «условия Рейнольдса» [124, 155]

$$\overline{u_1(x, y, z, t) + u_2(x, y, z, t)} = \overline{u_1(x, y, z, t)} + \overline{u_2(x, y, z, t)}; \quad (1.6)$$

$$\overline{c \cdot u(x, y, z, t)} = c \cdot \overline{u(x, y, z, t)}; \quad (1.7)$$

$$\overline{\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{u(x, y, z, t)}}{\partial s}; \quad (1.8)$$

$$\overline{u_1(x, y, z, t) \cdot u_2(x, y, z, t)} = \overline{u_1(x, y, z, t)} \cdot \overline{u_2(x, y, z, t)}, \quad (1.9)$$

где $c = \text{const}$ — произвольная ненулевая константа; $s \in \{x, y, z, t\}$ — произвольный элемент множества независимых переменных.

Условие (1.8) в некоторых случаях заменяют на более общее требование перестановочности операций осреднения и предельного перехода. Полагая $u_1(x, y, z, t) = 1$, из условия (1.9) следует, что

$$\overline{\overline{u(x, y, z, t)}} = \overline{u(x, y, z, t)}. \quad (1.10)$$

Легко увидеть, что при теоретико-вероятностной трактовке функции $u(x, y, z, t)$ ее значение в произвольной выделенной точке пространства независимых переменных будет представлять собой случайную величину $U = u(x_1, y_1, z_1, t_1)$. В таком случае теоретическая оценка среднего значения функции $u(x_1, y_1, z_1, t_1)$ в данной точке может быть найдена следующим образом:

$$\overline{u(x_1, y_1, z_1, t_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot p(u) du, \quad (1.11)$$

где $p(u)$ — функция плотности распределения вероятности случайной величины $U = u(x_1, y_1, z_1, t_1)$, удовлетворяющая равенству

$$P(u < u(x_1, y_1, z_1, t_1) < u + du) = p(u) du. \quad (1.12)$$

Следовательно, с точки зрения теории вероятностей, значение функции $u(x, y, z, t)$ в произвольной выделенной точке пористой среды в произвольный момент времени $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ представляет собой случайную величину, характеризующую функцию распределения

$$F(u) = \int_{-\infty}^u p(v) dv. \quad (1.13)$$

Выше речь шла о теоретической оценке среднего значения функции $u(x_1, y_1, z_1, t_1)$ в выделенной точке пространства независимых перемен-

ных. Однако подобный подход может быть распространен и на все поле значений функции $u(x, y, z, t)$. Сопоставив каждой точке пространства определенную функцию плотности распределения $p(u)$, можно при идентичных внешних условиях каждый раз получать новое поле значений для функции u . В результате любая ее конкретная реализация рассматривается как выборочное значение из соответствующей статистической совокупности.

Таким образом, приняв исходное допущение о существовании распределения вероятности для некоторой функции $u(x, y, z, t)$ в произвольной точке пористой среды, мы получаем возможность использовать хорошо разработанный аппарат современной теории вероятностей для решения вопросов, связанных с нахождением ее теоретических числовых оценок. И хотя нельзя заранее предвидеть, какую из возможных реализаций примет указанная случайная функция, тем не менее при сравнительно широких условиях осреднение по большому числу реализаций утрачивает случайных характер и проявляет свойства детерминированности.

При этом возникает дополнительный вопрос о правомерности сопоставления теоретических выводов с данными непосредственных измерений. В соответствии с законом больших чисел для эмпирического определения теоретических числовых оценок с достаточной степенью точности необходимо иметь результаты непосредственных измерений, производившихся в серии большого числа опытов, повторяющихся в идентичных условиях. На практике мы чаще всего не имеем такого множества идентичных опытов и вынуждены довольствоваться значениями, полученными в результате весьма малого числа повторений [6, 39]. В таких случаях в качестве оценки используются лишь простейшие эмпирические средние, вычисляемые по ограниченным интервалам пространства и/или времени.

Следовательно, переход к теоретико-вероятностному толкованию поведения функции $u(x, y, z, t)$ означает, что вместо рассмотрения частных свойств того или иного метода осреднения мы рассматриваем гипотезу о близости эмпирических средних к соответствующим теоретическим оценкам. Предположение о сходимости временных средних с соответствующими теоретическими оценками при неограниченном увеличении интервала осреднения известно под названием «эргодической гипотезы». В статистической механике эргодическая гипотеза впервые была сформулирована великим австрийским физиком Л. Больцманом в 1871 г.: «Если система находится в стационарном состоянии, то все доступные для нее микросостояния являются равновероятными». В результате вместо рассмотрения большой серии испытаний однотипных стационарных систем можно ограничиться рассмотрением только одной такой системы на протяжении достаточно длительного промежутка времени. Строгое доказательство свойства эргодичности в настоящее время доступно лишь для некоторых частных случаев (см., например, работы Дж. Биркгофа и Кампе де Ферье [72, 73]).

В общей постановке такое доказательство является пока нерешенной проблемой.

Заметим, что все вышеприведенные рассуждения сделаны в предположении о репрезентативности операции осреднения для всего характерного диапазона масштабов пористой среды. Однако существуют многочисленные примеры природных и искусственных пористых сред, структура которых позволяет выделить два и более таких диапазонов [7, 33, 34, 49]. Феноменологическое описание такой среды нуждается в построении иерархического ансамбля процедур осреднения с формированием некоторого счетного множества для граничных точек по характерному масштабу.

1.1.2. Основные эмпирические показатели пористой среды.

Одним из важнейших эмпирических показателей пористой среды является ее объемная пористость

$$\Pi_{vo} = \frac{V_p}{V_p + V_m} = \frac{V_p}{V_o}, \quad (1.14)$$

где V_p — полный объем порового пространства; V_m — объем структурной матрицы; V_o — общая величина элементарного репрезентативного объема пористой среды.

При определении пористости следует различать полную Π_{vo} и эффективную Π_{vs} пористость. Понятие эффективной пористости базируется на представлении о связности некоторой части пор между собой. В результате в поровом пространстве формируется единая система пор, связанная с поверхностью пористого тела и проницаемая для внешней среды.

Различие между полной и эффективной пористостью можно охарактеризовать коэффициентом объемной связности

$$k_{vs} = \frac{\Pi_{vs}}{\Pi_{vo}}, \quad (1.15)$$

принимающим значения от $k_{vs} = 0$ при полностью изолированной до $k_{vs} = 1$ при полностью открытой структуре порового пространства.

Анализ структуры поровых каналов показывает, что при малых значениях пористости помимо полностью изолированных появляется значительное число тупиковых пор, имеющих одностороннюю связь с внешней средой. Так, на рис. 1.1, а значительная часть поровых каналов, связанных с фронтальной поверхностью пористой среды, является тупиковой. Как видно, проницаемость таких каналов для внешней среды будет весьма ограниченной.

Вопрос о соотношении различных видов пор в реальных пористых телах весьма сложен для изучения. Как было показано в работах [1, 70], при значениях полной объемной пористости от 0,07 до 0,12 спеченные порошковые металлические пористые материалы оказываются полностью непроницаемыми, из чего следует, что весь объем порового пространства образуется тупиковыми и закрытыми порами. Разница

в пороговых значениях объемной пористости объясняется различиями во фракционном составе, форме частиц и степени уплотнения используемых порошков. С другой стороны, пористые материалы с вспененной или волокнистой структурой, подобные показанным на рис. 1.1, б–д, образуют поровое пространство, практически целиком состоящее из открытых пор [75, 93, 149, 166].

В то же время, явное разделение пористости на полную и эффективную в некоторых публикациях [37, 39] не производится. Это связано с тем, что в большинстве экспериментальных методов определяется именно эффективная пористость $\Pi_v = \Pi_{vs}$. Однако нельзя не заметить, что при расчете некоторых характеристик пористой среды допущение $\Pi_v = \Pi_{vs} = \Pi_{vo}$ может приводить к существенным ошибкам. Так, при определении эффективной плотности насыщенной жидкостью пористой среды необходимо учитывать и эффективную, и полную пористость, так как все изолированные и значительная часть тупиковых пор в большинстве случаев заполнены каким-либо газом, плотность которого существенно ниже, чем у материала пористой матрицы или заполняющей поровое пространство жидкости.

По аналогии с полной объемной пористостью Π_{vo} определяют еще одну статистическую характеристику пористой среды — полную просветность структуры Π_{fo} :

$$\Pi_{fo} = \frac{F_p}{F_p + F_m} = \frac{F_p}{F_o}, \quad (1.16)$$

где F_p — площадь полного сечения порового пространства (просвет структуры); F_m — площадь сечения структурной матрицы; F_o — общая площадь произвольного сечения элементарного репрезентативного объема пористой среды.

Применение гипотезы сплошности к изотропным пористым средам приводит к выводу о равенстве значений объемной пористости и просветности $\Pi_{vo} = \Pi_{fo}$. Однако необходимо подчеркнуть, что этот вывод носит предельный характер и выполняется для макроскопических объемов фиктивной сплошной среды.

Одной из отличительных особенностей пористых материалов является их чрезвычайно развитая внутренняя поверхность. Обычно используется характеристика удельной поверхности пористой среды σ_{so} , имеющая размерность $\dim \sigma_{so} = L^{-1}$:

$$\sigma_{so} = \frac{S_p}{V_o}, \quad (1.17)$$

где S_p — площадь полной внутренней поверхности порового пространства.

Разделение поверхности порового пространства на полную и эффективную позволяет, по аналогии с объемной пористостью, определить коэффициенты просветной k_{fs} и поверхностной связности k_{ss} , изменя-

ющиеся в том же диапазоне, что и коэффициент объемной связности k_{vs} :

$$k_{fs} = \frac{\Pi_{fs}}{\Pi_{fo}}; \quad k_{ss} = \frac{\sigma_{ss}}{\sigma_{so}}, \quad (1.18)$$

где Π_{fs} — эффективная просветность структуры; σ_{ss} — эффективная удельная поверхность порового пространства.

Помимо вышеуказанных показателей для описания структуры порового пространства применяются характеристики формы, среднего диаметра капилляров и их дисперсии, коэффициент извилистости поровых каналов, кривые распределения относительного объема пор по размерам (подробнее см. в работах [6, 27, 33, 131]). Указанные характеристики тесно связаны с выбором конкретного образца пористого материала и имеют существенное значение лишь для корректного выбора параметров репрезентативного объема и проведения процедуры осреднения. Остальные показатели рассчитываются уже для фиктивной сплошной среды в процессе постановки и решения конкретных задач.

1.2. Основные закономерности в теории фильтрации

Для случая фильтрации со свободной поверхностью объемный расход жидкости Q через пористый фильтр в форме Дарси определяется следующим образом:

$$Q = k_D F \frac{h+l}{l}, \quad (1.19)$$

где k_D — экспериментальная константа, получившая в отечественной литературе название коэффициента фильтрации; F, l — полная площадь поперечного сечения и толщина пористого фильтра; h — высота слоя воды, покрывающего фильтр.

Указанное соотношение постулирует линейную зависимость между скоростью фильтрации и вынуждающей силой. В современном представлении линейной закон фильтрации обычно записывается как

$$-\overrightarrow{\text{grad}} p = \frac{\mu}{\alpha} \overrightarrow{v}, \quad (1.20)$$

где μ — динамический коэффициент вязкости фильтрующейся жидкости; α — экспериментальная константа, называемая коэффициентом проницаемости; \overrightarrow{v} — вектор скорости фильтрации, определяемый для произвольной точки проницаемой среды A так, что произведение нормальной проекции вектора \overrightarrow{v} на площадь произвольной площадки, содержащей точку A , дает среднее значение объемного расхода жидкости через указанную площадку.

1.2.1. Границы применимости линейного закона фильтрации.

Исследователями конца XIX — первой половины XX века было отмечено, что для целого ряда задач, связанных с движением вязкой

жидкости в капиллярном пространстве изотропной пористой среды, линейный характер зависимости между скоростью течения и градиентом давления в потоке жидкости может нарушаться [50, 96, 102, 125]. Указанное явление наиболее существенно проявляется при рассмотрении фильтрации в пористых телах с нерегулярной внутренней структурой как при больших, так и при малых градиентах давления. Заметим, что под это определение попадает значительная часть практических задач, возникающих в современной геофизике, машиностроении и энергетике.

Качественные механизмы, вызывающие подобное отклонение, могут быть различными, но во всех таких случаях зависимость между модулями векторов скорости фильтрации и градиента давления наиболее адекватно отображается с помощью нелинейного закона сопротивления

$$-\operatorname{grad} p = f(v), \quad (1.21)$$

где $f(v)$ — некоторая функция, записанная относительно скорости фильтрации v .

Одним из первых вариантов нелинейной функции в правой части уравнения (1.21) стало предложенное П. Форхгеймером [102] полиномиальное выражение второй степени

$$f(v) = a v + b v^2, \quad (1.22)$$

где a, b — константы, определяемые экспериментально в каждом конкретном случае.

Последующие исследования показали, что для улучшения корреляции с экспериментальными данными следует использовать полиномы третьей степени, но это несколько затрудняет физическую интерпретацию и выбор критериев для оценки значений коэффициентов полинома. В результате наибольшее распространение к настоящему времени получила более простая форма (1.22) с учетом членов до второго порядка включительно. В большинстве случаев коэффициенты полинома представлены в виде отношений динамического коэффициента вязкости μ и плотности ρ фильтрующейся среды к двум другим коэффициентам α и β . Последние имеют смысл вязкостного и инерционного коэффициентов проницаемости пористой среды с размерностями $\dim \alpha = L^2$, $\dim \beta = L^1$, а соответствующее соотношение в форме (1.21) носит название модифицированного уравнения Дарси или двучленного закона сопротивления

$$-\operatorname{grad} p = \frac{\mu}{\alpha} v + \frac{\rho}{\beta} v^2, \quad (1.23)$$

или в безразмерном виде

$$C_F = \frac{2}{\operatorname{Re}} + 2; \quad C_F = -\operatorname{grad} p \frac{\beta}{\rho} \frac{2}{v^2}; \quad \operatorname{Re} = v \frac{\alpha}{\mu} \frac{\rho}{\beta}, \quad (1.24)$$

где C_F — приведенный коэффициент гидравлического сопротивления; Re — критерий Рейнольдса.

Заметим, что роль характерного размера при течении вязкой жидкости в пористой среде играет отношение вязкостного коэффициента проницаемости к инерционному α/β .

Запись закона сопротивления в форме (1.24) предполагает, что с достаточной степенью точности в фильтрационном течении можно выделить три характерных режима (см. рис. 1.2, а):

- а) вязкостный режим течения (течение Дарси) наблюдается при числах Рейнольдса $Re < 10^{-2}$; приведенный коэффициент гидравлического сопротивления в этом случае определяется соотношением $C_F \approx 2/Re$;
- б) переходный режим течения наблюдается при $10^{-2} \leq Re \leq 10^2$; приведенный коэффициент гидравлического сопротивления в этом случае равен $C_F = 2/Re + 2$;
- в) инерционный режим течения наблюдается при $Re > 10^2$; приведенный коэффициент гидравлического сопротивления в этом случае практически постоянен: $C_F \approx 2$.

Проблеме определения значений вязкостного и инерционного коэффициентов проницаемости пористой среды в различных условиях во второй половине XX века были посвящены обширные экспериментальные и теоретические исследования многих авторов. Основные результаты исследований по искусственным металлическим пористым материалам наиболее систематично изложены в работах [6, 39, 52].

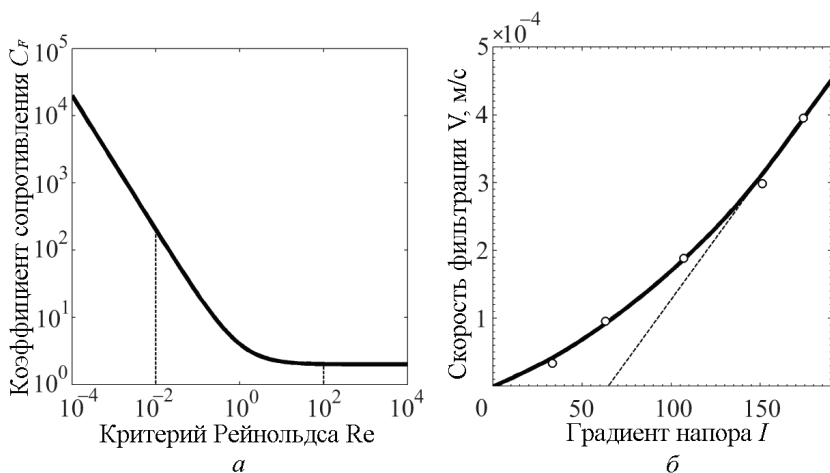


Рис. 1.2. Нарушение линейного закона фильтрации: а) зависимость приведенного коэффициента сопротивления C_F от критерия Рейнольдса Re для течения вязкой жидкости в пористой среде; б) зависимость скорости фильтрации V от градиента напора I для течения дистиллированной воды в гидрофильной пористой среде [91]

Одной из первых работ, показавших, что закон Дарси может нарушаться при уменьшении вынуждающей силы был отчет об экспериментальных исследованиях, опубликованный Ф. Г. Кингом в 1898 г. [125]. Указания на существование верхнего и нижнего пределов применимости закона Дарси также можно встретить в работе Н. Н. Павловского [36].

На рис. 1.2, б показано поведение скорости фильтрации в области малых значений напора при протекании дистиллированной воды в гидрофильной пористой среде [91]. Как видно из приведенного графика, при уменьшении вынуждающей силы (градиента напора) скорость фильтрации отклоняется от прямой линии, предсказанной по закону Дарси, и плавно падает до нуля одновременно с исчезновением градиента. Попытки аппроксимации подобного поведения с помощью линейных соотношений типа (1.20) привели в свое время к появлению термина «начального градиента» [42]. Достаточно подробный обзор работ по исследованию фильтрации с начальным градиентом приведен в работе Д. Шварцендрубера [160].

1.2.2. Моделирование нелинейной фильтрации. Можно привести значительное число факторов, объясняющих наличие фильтрационных аномалий в области малых значений вынуждающей силы, однако все они так или иначе будут связаны с формированием межмолекулярных связей в слоях жидкости, прилегающих к внутренней поверхности поровых каналов.

Результаты исследований Н. В. Михайлова, П. А. Ребиндера [29] и Н. Ф. Бондаренко [8] позволяют рассматривать значительную часть капельных жидкостей с водородными связями как тиксотропные с эффективной вязкостью μ , определяемой отношением

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\epsilon}}, \quad (1.25)$$

где τ — напряжение сдвига; $\dot{\epsilon}$ — скорость сдвиговой деформации элементарного объема жидкости.

Эффективная вязкость в этом случае представляется некоторой статистической характеристикой, описывающей равновесное состояние между процессами разрушения и восстановления структуры межмолекулярных связей при установившемся движении жидкости (рис. 1.3). При напряжениях, не превышающих сдвиговой прочности межмолекулярных связей $\tau < \tau_0$, эффективная вязкость жидкости стремится к наибольшей ньютоновской вязкости $\mu \rightarrow \mu_0$. В области больших напряжений сдвига $\tau > \tau_{\text{inf}}$ эффективная вязкость переходит к другому пределу — наименьшей ньютоновской вязкости жидкости $\mu \rightarrow \mu_{\text{inf}}$. Промежуточная область сдвиговых напряжений $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_{\text{inf}}$ соответствует неньютоновскому поведению жидкости. Заметим, что время восстановления структуры межмолекулярных связей $\mu \rightarrow \mu_0$ после снятия действующих напряжений зависит от текущего термодинамического состояния системы «жидкость — пористая матрица» и в общем случае

может быть весьма значительным, а не мгновенным, как это зачастую предполагается.

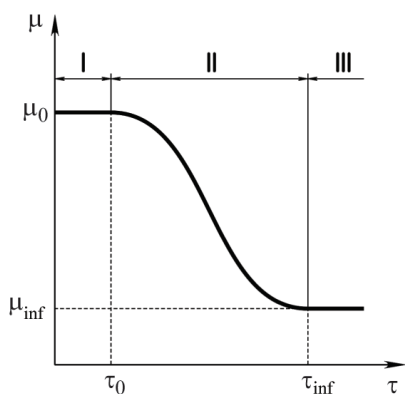


Рис. 1.3. Зависимость эффективной вязкости μ от напряжения сдвига τ : I — область наибольшей ньютоновской вязкости; II — область переменной (неньютоновской) вязкости; III — область наименьшей ньютоновской вязкости

Непосредственное использование понятия переменной эффективной вязкости, адекватно отражающей всю сложность течения структурированных жидкостей, представляется исключительно плодотворным, однако встречает существенные математические трудности при решении прикладных задач [8]. В связи с этим в большинстве задач рассматриваются лишь некоторые частные случаи.

Реологическое уравнение для изотропной ньютоновской жидкости получается из (1.25) с помощью допущения о независимости эффективной вязкости от скорости сдвиговых деформаций:

$$\tau = \mu \cdot \dot{\epsilon}; \quad \mu = \text{const}. \quad (1.26)$$

Графиком зависимости (1.26) в координатах $(\tau, \dot{\epsilon})$ будет прямая линия, проходящая через начало координат (линия I на рис. 1.4).

Реологическое уравнение одной из простейших неньютоновских жидкостей описывается степенным законом

$$\tau = k_{\mu} \cdot \dot{\epsilon}^n; \quad k_{\mu} = \text{const}; \quad n = \text{const}, \quad (1.27)$$

где k_{μ} , n — константы, определяемые по данным вискозиметрических испытаний и анализа кривых consistency.

Параметр $n < 1$ характеризует степень отклонения в поведении жидкости от ньютоновской реологической модели, а параметр k_{μ} является мерой консистенции жидкости: чем выше k_{μ} , тем меньше ее текучесть. Эффективная вязкость неньютоновской жидкости определяется из реологического уравнения (1.27) с учетом соотношения (1.25):

$$\mu = k_{\mu} \cdot \dot{\epsilon}^{n-1}. \quad (1.28)$$

В координатах $(\tau, \dot{\epsilon})$ график зависимости (1.27) также проходит через начало координат, но имеет существенно нелинейный характер в области малых сдвиговых напряжений (линия II на рис. 1.4). Более подробные сведения о других моделях неньютоновских жидкостей и технике проведения вискозиметрических испытаний можно найти в [40, 48]. Одной из первых работ в отечественной литературе, посвященных исследованиям гидродинамики и теплообмена неньютоновских

жидкостей, является монография З. П. Шульмана и Б. М. Берковского [61].

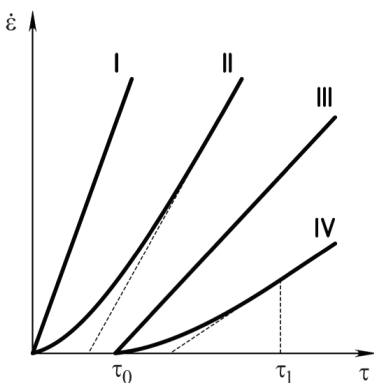


Рис. 1.4. Зависимость скорости деформаций $\dot{\epsilon}$ от напряжения сдвига τ : I — ньютоновская жидкость; II — неньютоновская жидкость; III — бингамовская жидкость; IV — шведовская жидкость

Реологическое уравнение бингамовской вязкопластичной жидкости для напряжений, больших некоторого начального значения $\tau > \tau_0$, аналогично уравнению (1.26):

$$\tau - \tau_0 = \mu \cdot \dot{\epsilon}, \quad (1.29)$$

где τ_0 — напряжение, соответствующее сдвиговой прочности межмолекулярных связей. При напряжениях $\tau \leq \tau_0$ такая жидкость считается жесткой, недеформируемой [47].

Шведовская жидкость, для которой характерно наличие начального сдвигового напряжения τ_0 в сочетании с нелинейным поведением при $\tau_0 < \tau \leq \tau_1$, обычно описывается уравнением

$$\tau - \frac{\tau_0^2}{\tau} = \mu \cdot \dot{\epsilon}. \quad (1.30)$$

Течение в шведовской жидкости начинается при $\tau > \tau_0$, при этом ее дифференциальная вязкость $d\tau/d\dot{\epsilon}$ быстро уменьшается и достигает постоянного значения при $\tau > \tau_1$ (см. линию IV на рис. 1.4).

Представление о существовании начального сдвигового напряжения в жидкости с микроструктурой привело к появлению в работах В. М. Ентова [14, 15] выражения для закона сопротивления с предельным градиентом:

$$\begin{cases} -(\text{grad} p - \Upsilon_0) = \frac{\mu}{\alpha} v & \text{при } v > 0; \\ -(\text{grad} p - \Upsilon_0) = 0 & \text{при } v = 0, \end{cases} \quad (1.31)$$

где $\Upsilon_0 = \text{const}$ — некоторое «предельное» значение градиента давлений в рассматриваемой пористой среде.

На основе реологической модели шведовской жидкости в работе [17] было предложено выражение для закона сопротивления, основанное на оценке критического значения так называемой R -функции:

$$R = \frac{v\rho\sqrt{\alpha}}{\mu\sqrt{\Pi_{vs}^3}}; \quad (1.32)$$

$$\begin{cases} -\text{grad} p = \frac{\mu}{\alpha} \left(1 + b \left(\frac{R}{R_c} - 1 \right) + \frac{b}{\beta} \left(\frac{R^b}{R_c^b} - 1 \right) \right) & \text{при } R > R_c; \\ -\text{grad} p = \frac{\mu}{\alpha} v & \text{при } R \leq R_c, \end{cases}$$

где R_c — критическое значение R -функции, соответствующее нарушению линейного закона сопротивления.

Понятие критической точки в (1.29)–(1.32), при достижении которой происходит резкое изменение характера фильтрационного течения, тесно переплетается с представлениями о переходе от ламинарного течения к турбулентному в классической гидродинамике. Однако современные данные показывают, что механизмы формирования нелинейных явлений для сплошной и пористой сред существенно различаются.

1.3. Моделирование нелинейной фильтрации при степенном законе сопротивления

Рассмотрим моделирование нелинейной фильтрации при степенном законе сопротивления. Первые упоминания о применении степенных функций в задачах фильтрации были сделаны в публикациях академика Л.С. Лейбензона (см. работу [50]):

$$-\text{grad} p = \frac{v^n}{\gamma}, \quad (1.33)$$

где n — безразмерный показатель степени нелинейности фильтрации, определяемый в общем случае как действительное число $n \geq 0$; γ — эмпирический коэффициент, включающий в себя ряд характеристик рассматриваемой жидкости.

Заметим, что приведенные феноменологические соотношения для закона нелинейной фильтрации в пористой среде построены на основе аппроксимации опытных данных, а следовательно, выбор комплексов физических показателей, определяющих значения тех или иных эмпирических коэффициентов, носит достаточно произвольный характер.

Перепишем выражение закона фильтрации (1.33) в эквивалентной форме:

$$-\overrightarrow{\text{grad}} p = \left[\frac{\mu}{\alpha_n} \cdot v^n \right] \overrightarrow{v}, \quad (1.34)$$

где μ — динамический коэффициент вязкости фильтрующейся жидкости; α_n — нелинейный коэффициент проницаемости пористой среды. Взаимосвязь между коэффициентами γ и α_n в формулах (1.33) и (1.34) достаточно очевидна и определяется как $\gamma = \alpha_n / (\mu v)$.

Размерность нелинейного коэффициента проницаемости α_n , входящего в выражение (1.34), будет определяться как

$$\dim \alpha_n = \dim(\text{grad} p)^{-1} \cdot \dim \mu \cdot \dim v^{n+1}. \quad (1.35)$$

Подстановка в (1.35) соотношений размерности для каждого из сомножителей с последующим приведением подобных дает

$$\dim \alpha_n = L^{n+2} \cdot T^{-n} = L^2 \cdot (L \cdot T^{-1})^n,$$

или

$$\dim \alpha_n = \dim \alpha \cdot \dim v^n, \quad (1.36)$$

где α — величина коэффициента проницаемости в классическом законе фильтрации (1.20).

Основанием для определения размерности нелинейного коэффициента проницаемости α_n через линейный коэффициент α в (1.36) служит формальная аналогия в записи соотношений (1.20) и (1.34) такая, что при показателе степени n , стремящемся к нулю, нелинейный сомножитель v^n стремится к единице, а выражение нелинейного закона фильтрации (1.34) приводится к виду (1.20).

Примечательно, что указанная размерность непосредственно связана с выбором показателя степени n для скорости фильтрации и в общем случае имеет дробный порядок. Это позволяет говорить о том, что нарушение линейного закона сопротивления при движении жидкости в капиллярно-пористой среде связано с нелинейностью коэффициента проницаемости α_n , который представляет собой обобщенную характеристику внутренней структуры пористой среды.

1.3.1. Вывод системы уравнений нелинейной фильтрации.

Для построения физически правильной картины указанных взаимодействий сформулируем основные допущения теоретической модели нелинейной фильтрации в локально неоднородной пористой среде при степенном законе сопротивления.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением изотермической фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в пространстве двух независимых измерений. Выделяют два типа двумерных задач: плоские и осесимметричные. Заметим, что плоская задача может рассматриваться как частный случай осесимметричной, если расстояние до оси симметрии много больше характерного размера рассматриваемой области.

Записывая выражение закона фильтрации (1.34) в координатной форме, выразим координаты вектора скорости фильтрации v_ξ и v_ζ для некоторой ортогональной системы координат (ξ, ζ)

$$v_\xi = -\frac{\alpha_n}{\mu v^n} \frac{\partial p}{\partial \xi}; \quad v_\zeta = -\frac{\alpha_n}{\mu v^n} \frac{\partial p}{\partial \zeta}. \quad (1.37)$$

Введем для указанной системы координат функцию тока $\psi(\xi, \zeta)$, определяемую соотношениями

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = \rho \xi^r v_\xi; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\rho \xi^r v_\zeta, \quad (1.38)$$

где ρ — объемная плотность фильтрующейся жидкости; r — геометрический параметр, равный единице для осесимметричного случая и нулю для плоского.

Преобразуем уравнения (1.37) и (1.38) к безразмерному виду. Для этого проведем нормировку основных величин по ограниченному ряду характерных параметров. Обозначим поток массы через единичную площадку как $g = \rho v$ и умножим уравнение (1.38) на ρ^{n+1} . В результате получим следующие соотношения для замены переменных:

$$\tilde{g}_\xi = \frac{g_\xi}{g_0}; \quad \tilde{g}_\zeta = \frac{g_\zeta}{g_0}; \quad \tilde{\xi} = \frac{\xi}{d_0}; \quad \tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{d_0}; \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_0}; \quad \tilde{\psi} = \frac{\psi}{g_0 d_0}. \quad (1.39)$$

Здесь g_0 — характерная величина удельного потока массы фильтрующейся жидкости; d_0 — характерный размер пористой среды; p_0 — характерное давление в потоке жидкости.

Как показано в работах С.А. Чаплыгина [51], для введенных безразмерных величин в уравнениях вида (1.37) при решении плоских задач можно выполнить переход от исходной системы координат (ξ, ζ) к координатам (τ, β) , определяемым с помощью соотношений

$$\tilde{g} = \exp \frac{\tau}{\sqrt{n+1}}; \quad \tilde{g}_\xi = \tilde{g} \cdot \cos \beta; \quad \tilde{g}_\zeta = \tilde{g} \cdot \sin \beta. \quad (1.40)$$

В результате вышеперечисленных преобразований получим систему уравнений, описывающих двумерную изотермическую фильтрацию при степенном законе сопротивления [10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tau} \frac{1}{\tilde{\xi}^r} = \frac{\sqrt{n+1}}{\chi} \exp \left[-\frac{n\tau}{\sqrt{n+1}} \right] \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \beta}; \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta} \frac{1}{\tilde{\xi}^r} - \sqrt{n+1} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta} \frac{1}{\tilde{\xi}^r} \right] - \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tau} \frac{1}{\tilde{\xi}^r} \right] \right] = \\ = \frac{\sqrt{n+1}}{\chi} \exp \left[-\frac{n\tau}{\sqrt{n+1}} \right] \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau}. \end{array} \right. \quad (1.41)$$

В частном случае, когда рассматривается плоская задача фильтрации, параметр $r = 0$ и результирующая система уравнений имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tau} = \frac{\sqrt{n+1}}{\chi} \exp \left[-\frac{n\tau}{\sqrt{n+1}} \right] \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \beta}; \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta} = \frac{\sqrt{n+1}}{\chi} \exp \left[-\frac{n\tau}{\sqrt{n+1}} \right] \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau}, \end{array} \right. \quad (1.42)$$

где χ — безразмерный комплекс параметров фильтрации, определяемый с помощью соотношения

$$\chi = \frac{\mu}{\alpha_n} \frac{d_0}{p_0} \left[\frac{g_0}{\rho} \right]^{n+1},$$

\tilde{p} — безразмерное давление в потоке несжимаемой жидкости.

Исключив из (1.42) функцию тока $\tilde{\psi}$ и выписав уравнение относительно безразмерного давления \tilde{p} , получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tau^2} - \varepsilon \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} = 0, \quad (1.43)$$

где ε — масштабный коэффициент при первой производной, в безразмерном случае определяемый как

$$\varepsilon = \frac{n}{2\sqrt{n+1}}.$$

После подстановки

$$\tilde{p} = P(\tau, \beta) \cdot e^{\varepsilon \tau} \quad (1.44)$$

выражение (1.43) преобразуется в уравнение Клейна–Гордона относительно новой функции P в плоскости переменных Чаплыгина (τ, β) :

$$\nabla^2 P - \varepsilon^2 P = 0. \quad (1.45)$$

Таким образом, исходная система двух уравнений, описывающих плоскую задачу нелинейной изотермической фильтрации в системе координат (ξ, ζ) для вязкой несжимаемой жидкости при степенном законе сопротивления, сводится к одному уравнению Клейна–Гордона относительно функции P , определенной в соответствующей области переменных Чаплыгина (τ, β) при заданных граничных условиях.

1.3.2. Построение частного решения уравнения Клейна–Гордона методом Винера–Хопфа. Рассмотрим общие принципы построения частного решения плоской задачи изотермической нелинейной фильтрации в форме (1.45) при заданных граничных условиях.

Анализ соотношения (1.44) показывает, что функция $P(\tau, \beta)$ определена для всех значений переменной $-\infty < \tau < +\infty$. В этом случае преобразование Фурье функции $P(\tau, \beta)$ по переменной τ определяется выражением

$$\tilde{P}(\lambda, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau, \beta) e^{-i\lambda\tau} d\tau. \quad (1.46)$$

Исследуем свойства изображения $\tilde{P}(\lambda, \beta)$, рассматривая его как функцию комплексной переменной λ . Для этого представим оригинал функции $P(\tau, \beta)$ в виде

$$P(\tau, \beta) = P_-(\tau, \beta) + P_+(\tau, \beta), \quad (1.47)$$

где частичные функции $P_-(\tau, \beta)$ и $P_+(\tau, \beta)$ отличны от нуля в отрицательной и положительной полуплоскости соответственно:

$$\begin{aligned} P_-(\tau, \beta) &= \begin{cases} P(\tau, \beta) & \text{при } \tau \leq 0; \\ 0 & \text{при } \tau > 0; \end{cases} \\ P_+(\tau, \beta) &= \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq 0; \\ P(\tau, \beta) & \text{при } \tau > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Изображение по Фурье $\tilde{P}(\lambda, \beta)$ для функции $P(\tau, \beta)$ при этом, очевидно, будет определяться с помощью композиции частичных изображений $\tilde{P}_-(\lambda, \beta)$ и $\tilde{P}_+(\lambda, \beta)$ для соответствующих функций-оригиналов.

Рассмотрим частичную функцию $P_+(\tau, \beta)$, определяемую выражением (1.48). Ее изображение в соответствии с (1.46) записывается

$$\tilde{P}_+(\lambda, \beta) = \int_0^{\infty} P_+(\tau, \beta) e^{-i\lambda\tau} d\tau. \quad (1.49)$$

Поскольку функция $P_+(\tau, \beta)$ удовлетворяет условию

$$|P_+(\tau, \beta) e^{a\tau}| \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow +\infty,$$

то в случае, если $a < \varepsilon$, изображение функции $\tilde{P}_+(\lambda, \beta)$, определенное в соответствии с (1.49), является аналитической функцией переменной λ в области $\Im(\lambda) < a$, причем в этой области функция $\tilde{P}_+(\lambda, \beta) \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow +\infty$.

При выполнении перечисленных выше условий однозначности для функций $P_+(\tau, \beta)$ и $\tilde{P}_+(\lambda, \beta)$ доказано существование обратного преобразования [46]

$$P_+(\tau, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}_+(\lambda, \beta) e^{i\lambda\tau} d\lambda. \quad (1.50)$$

Аналогично предыдущему случаю рассмотрим функцию $P_-(\tau, \beta)$, для которой при выполнении условия

$$|P_-(\tau, \beta) e^{b\tau}| \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow -\infty,$$

с учетом выражений (1.46) и (1.48), изображение функции $P_-(\tau, \beta)$ запишется

$$\tilde{P}_-(\lambda, \beta) = \int_{-\infty}^0 P_-(\tau, \beta) e^{-i\lambda\tau} d\tau. \quad (1.51)$$

При выполнении условия $b > \varepsilon$ функция $\tilde{P}_-(\lambda, \beta)$ также будет являться аналитической функцией комплексной переменной λ в области $\Im(\lambda) > b$, и для этой области также верно, что функция $\tilde{P}_-(\lambda, \beta) \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow +\infty$.

Аналогично (1.50) оригинал функции $P_-(\tau, \beta)$ можно выразить через изображение с помощью обратного преобразования Фурье

$$P_-(\tau, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ib}^{+\infty+ib} \tilde{P}_-(\lambda, \beta) e^{i\lambda\tau} d\lambda. \quad (1.52)$$

Поскольку параметр ε положителен, $\varepsilon > 0$, то область аналитичности в пространстве изображения содержит действительную ось, при этом функция $P(\tau, \beta)$ может быть представлена через обобщенный интеграл Фурье [46] в форме (1.47) с учетом выражений (1.50) и (1.52) как

$$P(\tau, \beta) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty+ib}^{+\infty+ib} \tilde{P}_-(\lambda, \beta) e^{i\lambda\tau} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}_+(\lambda, \beta) e^{i\lambda\tau} d\lambda \right], \quad (1.53)$$

где подынтегральные функции $\tilde{P}_-(\lambda, \beta)$ и $\tilde{P}_+(\lambda, \beta)$ определяются в соответствии с выражениями (1.49) и (1.51).

Подставим выражение (1.53) в уравнение (1.45) и, используя новое обозначение для формального оператора, определенного на множестве $F \in \{P_-(\lambda, \beta); P_+(\lambda, \beta)\}$:

$$L(F) = \frac{d^2(F)}{d\beta^2} - q^2 F,$$

где $q^2 = \lambda^2 + \varepsilon^2$, получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty+ib}^{+\infty+ib} L(\tilde{P}_-) e^{i\lambda\tau} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} L(\tilde{P}_+) e^{i\lambda\tau} d\lambda \right] = 0.$$

Из приведенного выражения видно, что функции $L(\tilde{P}_-)$ и $L(\tilde{P}_+)$ регулярны соответственно в верхней λ_- и нижней λ_+ полуплоскостях комплексной переменной λ . В таком случае всюду, где выполняется равенство $\tilde{P} = \tilde{P}_- + \tilde{P}_+$ верно уравнение [46]

$$\frac{d^2(\tilde{P})}{d\beta^2} - q^2 \tilde{P} = 0. \quad (1.54)$$

Как показано в [19], решение уравнения (1.54) имеет вид

$$\tilde{P}(\lambda, \beta) = \tilde{P}(\lambda, 0) \frac{\text{sh}(q(\beta_0 - \beta))}{\text{sh}(q\beta_0)} + \tilde{P}(\lambda, \beta_0) \frac{\text{sh}(q\beta)}{\text{sh}(q\beta_0)}. \quad (1.55)$$

Здесь

$$\tilde{P}(\lambda, 0) = \tilde{P}_-(\lambda, 0) + \tilde{P}_+(\lambda, 0) \quad \text{при } \beta = 0; \quad (1.56)$$

$$\tilde{P}(\lambda, \beta_0) = \tilde{P}_-(\lambda, \beta_0) + \tilde{P}_+(\lambda, \beta_0) \quad \text{при } \beta = \beta_0, \quad (1.57)$$

где $\beta = \{0, \beta_0\}$ — предельные значения переменной Чаплыгина в граничных точках области фильтрации.

В зависимости от геометрии рассматриваемой области, в правых частях выражений (1.56), (1.57) может быть одно или два неизвестных слагаемых, аналитичных в какой-либо одной полуплоскости комплексной переменной λ_- или λ_+ . Для определения этих неизвестных воспользуемся тем, что в теоретической гидродинамике линии симметрии «а» и непроницаемые границы области фильтрации «b» считаются линиями тока, а следовательно для них верно условие

$$\left. \frac{\partial P(\tau, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\{\beta_a, \beta_b\}} = 0. \quad (1.58)$$

При этом, если переменная τ лежит в пределах $0 \leq \tau < +\infty$, то из выражения (1.58) следует, что

$$\left. \frac{d\tilde{P}(\lambda, \beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_a} = \tilde{\psi}_+^{(a)}(\lambda), \quad \left. \frac{d\tilde{P}(\lambda, \beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_b} = \tilde{\psi}_+^{(b)}(\lambda),$$

где $\tilde{\psi}_+^{(a)}(\lambda)$, $\tilde{\psi}_+^{(b)}(\lambda)$ — предельные значения изображения частичной функции тока регулярной в некоторой нижней полуплоскости комплексной переменной λ_+ .

Для определенности примем, что предельные значения переменной Чаплыгина для осей симметрии и непроницаемых границ области фильтрации соответственно равны $\beta_a = 0$ и $\beta_b = \beta_0$. С помощью соотношений (1.55)–(1.58) можно показать, что

$$\begin{cases} q \left(\tilde{P}(\lambda, \beta_0) - \tilde{P}(\lambda, 0) \right) \operatorname{cth} \left[\frac{q\beta_0}{2} \right] = \tilde{\psi}_+^{(b)}(\lambda) + \tilde{\psi}_+^{(a)}(\lambda); \\ q \left(\tilde{P}(\lambda, \beta_0) + \tilde{P}(\lambda, 0) \right) \operatorname{th} \left[\frac{q\beta_0}{2} \right] = \tilde{\psi}_+^{(b)}(\lambda) - \tilde{\psi}_+^{(a)}(\lambda). \end{cases} \quad (1.59)$$

В соответствии с принятым допущением в эту систему, кроме неизвестных функций $\tilde{P}(\lambda, 0)$ и $\tilde{P}(\lambda, \beta_0)$, из граничных условий (1.58), входят еще две неизвестные функции — $\tilde{\psi}_+^{(a)}(\lambda)$ и $\tilde{\psi}_+^{(b)}(\lambda)$.

В общем случае система двух алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными не имеет однозначного решения, но для рассматриваемых функций такое решение можно найти, используя метод факторизации Винера–Хопфа [35].

Основная идея метода Винера–Хопфа связана с изучением областей регулярности входящих в уравнения системы (1.59) функций и специальным представлением этих уравнений.

Пусть каждое из уравнений системы (1.59) допускает представление в виде

$$L_-(\lambda) \cdot U_-(\lambda) = L_+(\lambda) \cdot U_+(\lambda), \quad (1.60)$$

где левая часть аналитична в верхней полуплоскости $\Im(\lambda) > \xi$, а правая — в нижней полуплоскости $\Im(\lambda) < \zeta$ комплексной переменной λ , так что для обеих полуплоскостей существует общая полоса $\xi < \Im(\lambda) < \zeta$, для которой выполняются условия аналитичности обеих функций. Тогда, в силу единственности аналитического продолжения, можно утверждать, что существует единственная целая функция комплексной переменной λ , совпадающая с левой частью равенства (1.60) в верхней и правой частью того же равенства в нижней полуплоскости соответственно.

При этом, если известно, что функции, входящие в (1.60), растут на бесконечности не быстрее, чем конечная степень переменной λ , то, в силу теоремы Лиувилля, данная целая функция определяется с точностью до постоянных множителей. В частности, для ограниченных на бесконечности функций получим

$$L_-(\lambda) \cdot U_-(\lambda) = -L_+(\lambda) \cdot U_+(\lambda) = \text{const}.$$

Полученное соотношение позволяет определить обе неизвестные функции, входящие в равенство (1.60): $U_-(\lambda)$ и $U_+(\lambda)$.

Применение метода Винера–Хопфа для решения системы (1.59) в нашем случае позволяет однозначно определить искомые функции $\tilde{P}(\lambda, 0)$ и $\tilde{P}(\lambda, \beta_0)$. После их подстановки в равенство (1.55), являющееся решением дифференциального уравнения (1.54) в области изображений, переход в область оригиналов осуществляется по формулам обратного преобразования (1.50) и (1.52) с применением теории вычетов. Таким образом, применение вышеописанной методики позволяет получить частное решение краевой задачи для уравнения Клейна–Гордона в аналитических функциях.

1.4. Краевые задачи нелинейной фильтрации при степенном законе сопротивления

В большинстве опубликованных работ, посвященных практическим приложениям вышеизложенного метода [10–13, 54], в области изображений рассматривается решение только одного алгебраического уравнения с двумя неизвестными. Заметим, что применение метода Винера–Хопфа в более общем случае приводит к постановке задачи отыскания частного решения дифференциального уравнения Клейна–Гордона в области изображений с использованием системы двух алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными [56].

Рассмотрим краевую задачу о нелинейной изотермической фильтрации, подчиняющейся степенному закону, в пористой матрице, име-

ющей форму двойного полигонального симметричного клина с углом при основании, равном β_0 (см. рис. 1.5, а, б). Пусть на входной грани безразмерное давление фильтрующейся среды постоянно и равно единице $\bar{p}_1 = 1$, а на выходных — постоянно и равно нулю, $\bar{p}_2 = 0$.

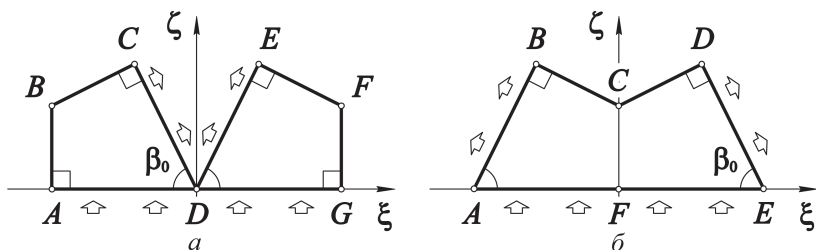


Рис. 1.5. Граница и характерные точки области фильтрации в системе координат (ξ, ζ)

В рамках вышеизложенного подхода возможны различные способы построения клиновидной области: показанная на рис. 1.5, а область $ABCDEFGDA$, и область $ABCDEFA$ на рис. 1.5, б. Основанием для подобного утверждения служит упоминавшееся ранее допущение об эквивалентности линий симметрии и непроницаемых границ области фильтрации линиям тока. Тогда в плоскости переменных Чаплыгина для указанных линий будут выполняться соотношения вида (1.58) и общая конфигурация области фильтрации изменится незначительно.

1.4.1. Построение области фильтрации и граничных условий.

Построение области фильтрации в плоскости переменных Чаплыгина в конкретном случае обычно не вызывает затруднений, поскольку не требует громоздких математических выкладок. В плоскости физических координат (ξ, ζ) область фильтрации обходится в определенном направлении и определяются точки, в которых линейная скорость фильтрации v принимает характерные значения $v = 0$, $v = v_0$, $v = +\infty$. В каждой характерной точке определяется величина угла β как угла наклона вектора скорости \vec{v} к положительному направлению координатной оси ξ . Заметим, что для области, показанной на рис. 1.5, а помимо изменения направления и начальной точки возможны два эквивалентных варианта обхода контура: $ABCDEFGDA$ и $ABCDGFEDA$. С точностью до обозначений это замечание выполняется и для области, показанной на рис. 1.5, б.

Из уравнения (1.40) следует, что указанным характерным значениям линейной скорости v отвечают значения переменной τ , соответственно равные $\tau = -\infty$, $\tau = 0$, $\tau = +\infty$. По известным значениям τ и β в характерных точках строится исследуемая область фильтрации в плоскости переменных Чаплыгина (см. рис. 1.6, а, б). Для соблюдения однозначности построенного отображения важно, чтобы последо-

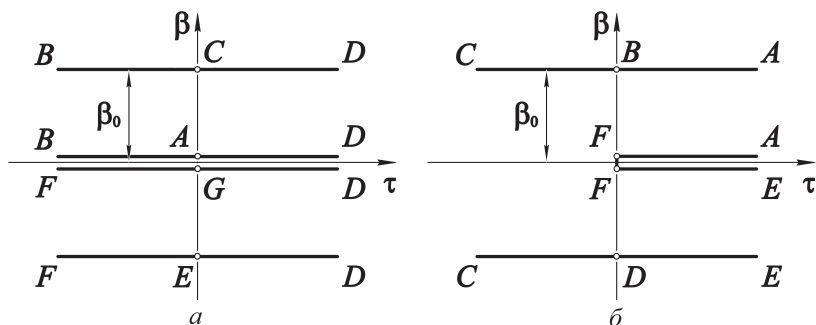


Рис. 1.6. Граница и характерные точки области фильтрации в координатах Чаплыгина (τ, β)

вательности обхода характерных точек в обеих областях были строго идентичными.

Построение частного решения уравнения Клейна–Гордона основано на применении интегрального преобразования Фурье к функции $P(\tau, \beta)$ по переменной τ . Указанный метод дает хорошие результаты, если область фильтрации может быть представлена в плоскости переменных Чаплыгина (τ, β) в виде полосы, бесконечной по переменной τ и ограниченной по переменной $\beta \in [-\beta_0, +\beta_0]$, что соответствует клиновидным пористым телам. В зависимости от постановки граничных условий область фильтрации в плоскости переменных Чаплыгина может иметь разрезы вдоль оси $\tau = 0$.

Так для области, показанной на рис. 1.5, а в координатах Чаплыгина, согласно уравнению (1.40), значения переменной τ для точек B и F равны $\tau = -\infty$, а в точке D значение τ соответственно равно $\tau = +\infty$. Ввиду очевидной симметрии рассматриваемой области в координатах (ξ, ζ) , скорость фильтрации в точках C и E одинакова. Для простоты положим, что она равна скорости фильтрации в точках A и G , что соответствует значению переменной $\tau = 0$. Таким образом, в плоскости координат (τ, β) указанная область представится в виде бесконечной полосы с составным разрезом вдоль оси τ (см. рис. 1.6, а).

1.4.2. Отыскание решения краевой задачи в области изображений. Как было показано выше, функция $P(\tau, \beta)$, может быть представлена в виде обобщенного интеграла Фурье (1.53). Тогда в области изображений уравнение Клейна–Гордона преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение (1.54), решение которого для полуполосы $0 \leq \beta \leq \beta_0$ имеет вид (1.55).

Существенно, что в случае конкретной краевой задачи для описанной области функции $\tilde{P}(\lambda, 0)$ и $\tilde{P}(\lambda, \beta_0)$ на границах области выражаются

$$\tilde{P}(\lambda, 0) = \tilde{P}_-(\lambda, 0) - \frac{i}{\lambda - i\varepsilon}; \quad \tilde{P}(\lambda, \beta_0) = \tilde{P}_-(\lambda, \beta_0). \quad (1.61)$$

Для отыскания неизвестных $\tilde{P}_-(\lambda, 0)$ и $\tilde{P}_-(\lambda, \beta_0)$ используем граничные условия на непроницаемых границах AB и BC

$$\left. \frac{\partial P(\tau, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\{0, \beta_0\}} = 0 \quad \text{при } \tau < 0.$$

Из этого выражения непосредственно следует, что

$$\left. \frac{d\tilde{P}(\lambda, \beta)}{d\beta} \right|_{\beta=0} = \tilde{\psi}_+^{(a)}(\lambda); \quad \left. \frac{d\tilde{P}(\lambda, \beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0} = \tilde{\psi}_+^{(b)}(\lambda).$$

Далее, следуя вышеизложенному методу, представим решение в виде (1.59) с учетом соотношений (1.61). Полученную систему уравнений исследуем методом Винера–Хопфа. Для этого введем обозначения

$$q \operatorname{th} \left[\frac{q\beta_0}{2} \right] = K_1(\lambda); \quad q \operatorname{cth} \left[\frac{q\beta_0}{2} \right] = K_2(\lambda)$$

и произведем факторизацию этих выражений, положив

$$K_1(\lambda) = \frac{1}{\varphi_{1+}(\lambda) \varphi_{1-}(\lambda)} \quad K_2(\lambda) = \varphi_{2+}(\lambda) \varphi_{2-}(\lambda),$$

где функции $\varphi_{1+}(\lambda)$ и $\varphi_{2+}(\lambda)$ — регулярны и не имеют нулей в нижней полуплоскости комплексной переменной λ , а функции $\varphi_{1-}(\lambda)$ и $\varphi_{2-}(\lambda)$ — регулярны и не имеют нулей в верхней полуплоскости λ .

Далее, записав новые обозначения

$$S_k = \sqrt{\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{\beta_0^2} + \varepsilon^2}, \quad R_k = \sqrt{\frac{4k^2 \pi^2}{\beta_0^2} + \varepsilon^2},$$

и опуская, ввиду сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{S_k} - \frac{1}{R_k} \right],$$

соответствующие экспоненциальные факторы Вейерштрасса [41], находим значения функций $\varphi_{1+}(\lambda)$ и $\varphi_{2+}(\lambda)$ в нижней и $\varphi_{1-}(\lambda)$ и $\varphi_{2-}(\lambda)$ в верхней полуплоскости комплексной переменной λ соответственно

$$\begin{aligned} \varphi_{2+}(\lambda) &= \frac{2}{\beta_0} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{\lambda - iS_k}{\lambda - iR_k} \right]; & \varphi_{1+}(\lambda) &= \frac{\varphi_{2+}(\lambda)}{\lambda - i\varepsilon}; \\ \varphi_{2-}(\lambda) &= \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{\lambda + iS_k}{\lambda + iR_k} \right]; & \varphi_{1-}(\lambda) &= \frac{\varphi_{2-}(\lambda)}{\lambda + i\varepsilon}. \end{aligned}$$

Подставив результат факторизации в решение уравнения (1.59), получим

$$\varphi_{2-}(\lambda) \left[\tilde{P}_-(\lambda, 0) + \tilde{P}_-(\lambda, \beta_0) - \frac{i}{\lambda - i\varepsilon} \right] =$$

$$= -\frac{1}{\varphi_{2+}(\lambda)} \left(\tilde{\psi}_+^{(a)}(\lambda) + \tilde{\psi}_+^{(b)}(\lambda) \right); \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi_{1-}(\lambda)} \left[\tilde{P}_-(\lambda, 0) + \tilde{P}_-(\lambda, \beta_0) - \frac{i}{\lambda - i\varepsilon} \right] = \\ = -\varphi_{1+}(\lambda) \left(\tilde{\psi}_+^{(a)}(\lambda) - \tilde{\psi}_+^{(b)}(\lambda) \right). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Принимая во внимание поведение функции $P(\tau, \beta)$ при $\tau \rightarrow -\infty$, легко можно установить, что левые и правые части (1.62) и (1.63) регулярны во всей области изменения комплексной переменной λ за исключением полюса в точке $\lambda = i\varepsilon$. Тогда, в соответствии с принципом аналитического продолжения и теоремой Лиувилля, выражения (1.62) и (1.63) можно записать в виде

$$\varphi_{2-}(\lambda) \left[\tilde{P}_-(\lambda, 0) + \tilde{P}_-(\lambda, \beta_0) - \frac{i}{\lambda - i\varepsilon} \right] = -\frac{ic_2}{\lambda - i\varepsilon}; \quad (1.64)$$

$$\frac{1}{\varphi_{1-}(\lambda)} \left[\tilde{P}_-(\lambda, 0) + \tilde{P}_-(\lambda, \beta_0) - \frac{i}{\lambda - i\varepsilon} \right] = \frac{ic_1}{\lambda - i\varepsilon}, \quad (1.65)$$

где c_1 и c_2 — константы, определяемые из граничных условий:

$$P(\tau, 0) = p_1 \quad \text{при} \quad 0 \leq \tau < +\infty; \quad (1.66)$$

$$P(\tau, \beta_0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \tau < +\infty. \quad (1.67)$$

Одновременное выполнение условий (1.66) и (1.67) возможно лишь при $c_1 = 0$. В таком случае из уравнения (1.65) следует, что

$$\tilde{P}_-(\lambda, 0) + \tilde{P}_-(\lambda, \beta_0) = -\frac{i}{\lambda - i\varepsilon}. \quad (1.68)$$

Совместное решение (1.64) и (1.68), дает

$$\tilde{P}_-(\lambda, 0) = \left[1 - \frac{c_2}{2\varphi_{2-}(\lambda)} \right] \frac{i}{\lambda - i\varepsilon}. \quad (1.69)$$

1.4.3. Переход к решению краевой задачи в области переменных Чаплыгина. Из выражения (1.69) с учетом (1.52) следует, что

$$P_-(\tau, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + ib}^{+\infty + ib} \left[1 - \frac{a}{2\varphi_{2-}(\lambda)} \right] \frac{i}{\lambda - i\varepsilon} e^{i\lambda\tau} d\lambda.$$

Анализ соотношений (1.64), (1.65) показывает, что подынтегральная функция в полученном выражении имеет полюсы первого порядка в точках $\lambda = i\varepsilon$, $\lambda = -iS_k$. Используя теорему о вычетах, для оси симметрии рассматриваемой области получаем

$$P_-(\tau, 0) = \left[1 - \frac{c_2}{2\Phi(\varepsilon)} \right] e^{-\varepsilon\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\Phi(S_k)c_2}{\beta_0(S_k + \varepsilon)S_k} e^{S_k\tau} \right].$$

Для нахождения постоянной c_2 воспользуемся выражением (1.68). Переходя к оригиналам и определив P , получаем для значений $\tau < 0$

$$P(\tau, 0) + P(\tau, \beta_0) = e^{-\varepsilon\tau}.$$

В соответствии с формулой (1.44) это означает, что сумма безразмерных давлений на непроницаемых гранях AB и BC при одинаковых τ равна 1. В точке B переменная $\tau = -\infty$ и выполняется двойное равенство $P(\tau, 0) = P(\tau, \beta_0) = 1/2$. Определив из (1.68) предел P при $\tau \rightarrow -\infty$ получаем, что $c_2 = \Phi(\varepsilon)$. Отсюда следует, что с учетом соотношений (1.55), (1.68) и (1.69), можно записать

$$\tilde{P}(\lambda, \beta) = -\frac{i\Phi(\varepsilon)}{2(\lambda - i\varepsilon)\varphi_{2-}(\lambda)} \cdot \frac{\text{sh}(q(\beta_0 - \beta)) - \text{sh}(q\beta)}{\text{sh}(q\beta_0)}.$$

Переходя в полученном выражении к функции $P(\tau, \beta)$, получим следующие соотношения:

а) для $\tau > 0$

$$P(\tau, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{i\Phi(\varepsilon)}{2(\lambda - i\varepsilon)\varphi_{2-}(\lambda)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{sh}(q(\beta_0 - \beta)) - \text{sh}(q\beta)}{\text{sh}(q\beta_0)} \right] e^{i\lambda\tau} d\lambda; \quad (1.70)$$

б) для $\tau < 0$

$$P(\tau, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + ib}^{+\infty + ib} \left[-\frac{i\Phi(\varepsilon)}{2(\lambda - i\varepsilon)\varphi_{2-}(\lambda)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{sh}(q(\beta_0 - \beta)) - \text{sh}(q\beta)}{\text{sh}(q\beta_0)} \right] e^{i\lambda\tau} d\lambda. \quad (1.71)$$

Интегрирование в формуле (1.70) производится по верхней λ_- , а в формуле (1.71) — по нижней λ_+ полуплоскости комплексной переменной λ .

Подынтегральная функция удовлетворяет лемме Жордана и теореме о вычетах, так как она аналитична во всей плоскости λ , за исключением точек $\lambda = \{i\varepsilon, R_k, -iS_k\}$, где она имеет простые полюсы, и равномерно стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Тогда с помощью теоремы о вычетах для (1.70) и (1.71) можно показать, что:

а) для $\tau > 0$

$$P(\tau, \beta) = \frac{\beta_0 - \beta}{\beta} e^{-\varepsilon\tau} - \frac{2\pi}{\beta_0^2} \Phi(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{k e^{-R_k\tau}}{R_k(R_k - \varepsilon)\Phi(R_k)} \sin \left[\frac{2k\pi\beta}{\beta_0} \right] \right];$$

б) для $\tau < 0$

$$P(\tau, \beta) = \frac{1}{2} e^{-\varepsilon\tau} - \frac{2}{\beta_0^2} \Phi(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi_2 - (S_k) e^{S_k \tau}}{S_k (S_k - \varepsilon)} \cos \left[\frac{(2k-1)\pi\beta}{\beta_0} \right] \right].$$

Отсюда, переходя от переменных Чаплыгина к физическим переменным с учетом соотношений (1.40) и (1.44), можно получить распределение безразмерного давления в рассматриваемой области фильтрации $\tilde{p}(\xi, \zeta)$.

Параметр фильтрации с выражается явным образом из соотношений (1.42), записанных с учетом формул преобразования для области физических переменных. Подставив в эти уравнения зависимость скорости фильтрации v от переменной Чаплыгина τ в форме (1.40) и интегрируя первое уравнение системы по τ в пределах от 0 до $-\infty$, а второе в пределах от $-\infty$ до 0 соответственно, для граничного значения переменной $\beta = \beta_0$ получим

$$\tilde{\xi}_1 = \frac{2}{\chi \beta_0} \Phi(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\Phi(S_k)}{S_k (S_k + \varepsilon - \sqrt{n+1})} \right] = \tilde{d}_1; \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_1 &= \frac{2}{\chi \beta_0} \Phi(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\Phi(S_k)}{S_k (S_k + \varepsilon - \sqrt{n+1})} \cdot \sin \beta_0 \right] = \\ &= \tilde{d}_2 \cdot \sin \beta_0. \quad (1.73) \end{aligned}$$

Из полученных выражений с учетом геометрических особенностей области фильтрации следует, что величина $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2$. Таким образом, система уравнений, связывающая основные параметры фильтрации с геометрическими характеристиками области, замыкается. В результате, с использованием соотношений (1.72), (1.73) параметр фильтрации χ в области с заданной геометрией, граничными условиями и характеристиками фильтрующейся жидкости определяется однозначно.

Глава 2

СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

В моделировании, как и в большинстве методов научных исследований, можно выделить экспериментальную и теоретическую части. Основу первого метода составляют теория подобия и анализ размерностей, использующие понятие *критерия подобия* для установления соответствия между физической моделью и реальным объектом¹⁾. Второй метод основан на исследовании характеристик физических объектов и явлений с помощью систем уравнений и различных математических методов.

Любое реальное явление обладает почти бесконечной сложностью. Оно связано с другими явлениями окружающего мира, которые могут не представлять непосредственного интереса для конкретного исследования, но, тем не менее, оказывать определенное влияние на весь рассматриваемый процесс. При этом математическая модель должна охватывать все наиболее важные характеристики изучаемого процесса, что ставит перед исследователями задачу выбора оптимального соотношения между детализацией математического описания формируемой модели и трудоемкостью ее решения. Если математическая модель сформулирована недостаточно тщательно, то какие бы методы ни были выбраны для ее решения, полученные результаты будут иметь весьма отдаленное отношение к реальному объекту исследований. Если же математическая модель учитывает слишком много связей и характеристик явления, то сложность полученной задачи может превысить доступные ресурсы или сделать ее решение принципиально невозможным.

Таким образом, если построение математической модели производится с определенной «погрешностью», то требование очень высокой точности к ее решению уже не является оправданным. В этих случаях для нахождения решения могут быть использованы методы вычислительной математики. Современные «численные» методы позволяют решать весьма сложные системы уравнений, что нередко дает

¹⁾ В теории подобия утверждается, что равенство *критериев подобия* для натурального объекта и его физической модели означает возможность переноса результатов, полученных для модели на реальный объект с учетом *преобразований подобия* [44].

возможность существенно повысить детализацию описания изучаемого процесса (по сравнению с точно решаемыми системами).

Первые опыты с методами решения уравнений, которые сегодня принято считать численными, были предприняты европейскими математиками еще в эпоху Возрождения. В последующие столетия эти методы получили значительное развитие и к середине XX века вошли в инструментарий исследователей наравне с классическими. Однако весьма интенсивный рост производительности вычислительных систем, наблюдающийся на протяжении последних пяти десятилетий, позволяет говорить о существенном увеличении роли компьютерных вычислений в научно-исследовательских задачах и о становлении нового подхода в методах численного моделирования.

Заметим, что современное развитие таких областей, как теория динамического хаоса и фрактальная геометрия было бы едва ли возможно без широкого использования компьютерной техники. Примеры расчетов и вычислительный эксперимент, традиционно относившиеся к разряду вспомогательных средств, сегодня выходят на первый план и зачастую определяют успех исследования.

К примеру, существование непериодических решений системы уравнений атмосферной конвекции было обнаружено в 1962 г. Б. Сольцменом [158]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y; \\ \dot{y} = -xz + rx - y; \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (2.1)$$

где x, y, z — фазовые переменные, а σ, r, b — некие безразмерные константы.

Однако основные детали хаотического поведения в указанной динамической системе¹⁾ были выявлены только благодаря численным экспериментам, проведенным Э. Лоренцем годом позже [134].

Указанные особенности проведения научных исследований становятся особенно важными при рассмотрении физических объектов, обладающих сложной внутренней структурой, неприводимой в общем случае к простым формам. При ближайшем рассмотрении, к таким объектам может быть отнесено большинство природных материалов и искусственных пористых структур. Попытки применения к ним традиционных методов математического описания приводят к невозможности учета значительной доли весьма важной информации, что порождает неустранимую погрешность еще на этапе проектирования модели. В подобных случаях методы численного моделирования из простого приложения превращаются в основной инструмент проведения исследований.

¹⁾ Включая характерные топологические особенности знаменитого фазового портрета системы (2.1), названного впоследствии *странным аттрактором*.

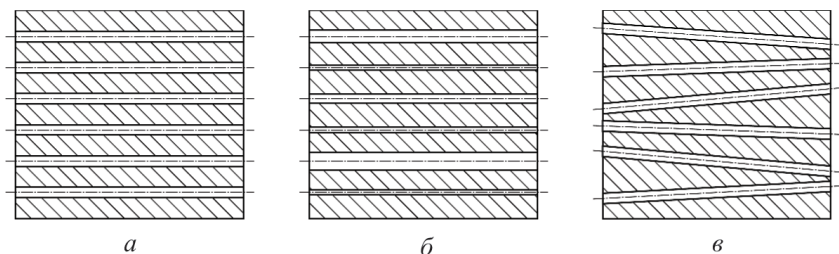


Рис. 2.1. Капиллярные модели пористой среды. Системы капилляров постоянного сечения: а) однородная система параллельных капилляров; б) система параллельных капилляров с дисперсией диаметров; в) система непересекающихся капилляров с дисперсией углов наклона

2.1. Капиллярные модели пористой среды

2.1.1. Системы капилляров постоянного сечения. В задачах тепло- и массопереноса первыми были разработаны модели на основе регулярных систем капилляров, пронизывающих непроницаемую сплошную среду (см. рис. 2.1). В базовых моделях поровое пространство представляет собой пучки капиллярных каналов с равномерным распределением в поперечной плоскости и различной ориентацией направления их осей относительно основного потока жидкости.

В указанных моделях диаметры единичных капилляров постоянны в продольном сечении. Причем в моделях на рис. 2.1, а и 2.1, в эти диаметры равны между собой и прямо пропорциональны эквивалентному размеру пористой среды [77, 130], а в модели на рис. 2.1, б диаметр индивидуального капилляра представляет собой случайную величину с функцией распределения, соответствующей распределению эквивалентных размеров, принятому для реальной пористой среды [78].

Заметим, что во многих публикациях, использующих аналогичные модели капиллярно-пористых структур, речь идет о характерных размерах моделируемой среды. Однако, при рассмотрении внутренней гидродинамики приходится учитывать сужение эффективного сечения капиллярного канала за счет местного отрыва потока от стенок, неравномерность профиля скоростей в поперечном сечении и прочие факторы. В связи с этим, представляется уместным применение термина эквивалентного размера по аналогии с эквивалентным диаметром каналов некруглого сечения, широко применяемым в прикладной гидродинамике [18].

Несмотря на явную анизотропию в моделях на рис. 2.1 объемная пористость Π_{vo} равна просветности структуры Π_{fo} и не зависит от продольного характерного размера y_0 . В качестве продольной здесь и далее выберем координату y , коллинеарную выделенному направлению в пористой среде (см. рис. 2.2), а поперечными — две другие координаты x

и z , ортогональные этому направлению. При достаточно большом числе капилляров n указанные характеристики определяются выражением

$$\Pi_{vo} = \Pi_{fo} = \frac{\pi n m_d^2}{4 x_0 z_0 \cos s_\alpha}, \quad (2.2)$$

где m_d — среднее значение диаметра индивидуальных капилляров d_i ; s_α — среднее квадратическое отклонение направления индивидуальных капилляров α_i от выделенного направления в пористой среде; x_0, z_0 — характерные размеры репрезентативного объема вдоль двух поперечных координат.

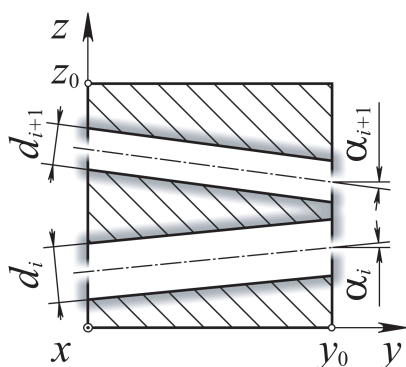


Рис. 2.2. Характерные размеры и расположение капилляров постоянного сечения в выделенном объеме пористой среды

В соответствии с (1.17) и (2.2) удельную поверхность в рассматриваемых моделях пористой среды определим как

$$\sigma_{so} = \frac{\pi n m_d}{x_0 z_0 \cos s_\alpha}. \quad (2.3)$$

Заметим, что для всех приведенных моделей эффективные показатели совпадают с полными $\Pi_{vs} = \Pi_{vo}$ и $\Pi_{fs} = \Pi_{fo}$, а коэффициенты связности равны единице $k_{vs} = k_{fs} = 1$.

Подобные модели весьма просты и наглядны, но позволяют учесть лишь основные особенности движения жидкости через пронизываемую среду. Впрочем,

это несколько не умаляет их значения для некоторых простых случаев моделирования. Кроме того, перечисленные модели дают очень хорошие результаты при рассмотрении некоторых природных и искусственных пористых материалов, удовлетворительно описываемых системой непересекающихся капилляров постоянного продольного сечения.

2.1.2. Системы капилляров переменного сечения. Дальнейшим развитием идеи о системе непересекающихся капилляров стали модели с капиллярными каналами переменного сечения (см. рис. 2.3, а). Изменение значения площади поперечного сечения в продольном направлении позволяет в явной форме учесть распределение местных гидравлических сопротивлений по длине пор и смоделировать поперечную неоднородность поля скоростей как во внутреннем пространстве, так и на выходе из пористого тела [174, 175].

Однако, представление пористой структуры в виде системы параллельных капилляров фактически приводит к одномерной постановке начальных и граничных условий, что сильно сужает круг решаемых

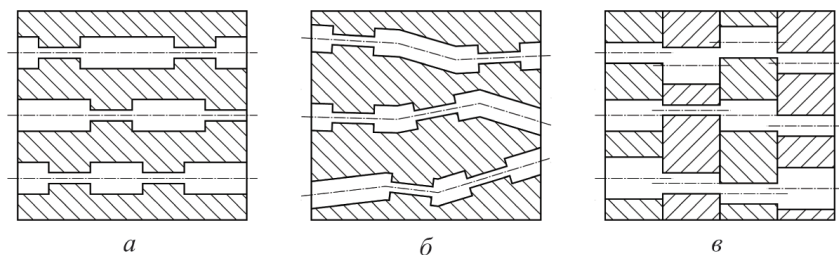


Рис. 2.3. Капиллярные модели пористой среды. Системы капилляров переменного сечения: а) параллельные капилляры с дисперсией местных сопротивлений; б) искривленные капилляры с дисперсией углов наклона и местных сопротивлений; в) многослойная система капилляров с дисперсией местных сопротивлений и эксцентриситетов

задач. Попытки избавиться от указанных недостатков привели к появлению двух независимых подходов:

- а) однослойных моделей, образуемых одной системой непересекающихся искривленных капиллярных каналов;
- б) многослойных моделей, образуемых несколькими системами параллельных каналов.

В первом случае (рис. 2.3, б) поровое пространство моделируется серией непересекающихся ломаных, каждый сегмент которых представляет собой одиночный капилляр с местными гидравлическими сопротивлениями [79]. Допустимая степень извилистости ¹⁾, а также количество и расположение местных сопротивлений определяется исходя из опытных данных о характере моделируемой пористой структуры.

В многослойных капиллярных моделях (рис. 2.3, в) пористая среда представляется в виде последовательности плоских слоев, которые пересекаются системой параллельных каналов со стохастическими изменениями диаметра и смещением оси индивидуального капилляра на каждом слое. Вариации размеров и координат таких капилляров в пределах одного слоя соответствуют кривым распределения эквивалентных размеров и проницаемости для моделируемой пористой среды [80, 145].

Объемная пористость и просветность структуры в системах каналов переменного сечения определяются аналогично (2.2) с учетом изменения эквивалентного гидравлического диаметра для каждого из прямолинейных участков индивидуальных капилляров из-за влияния мест-

¹⁾ Степень извилистости капиллярного канала δ_l определяется как отношение общей длины капилляра $l_i = \sum_j l_{ij}$, пронизывающего выделенный объем пористой среды, к характерному размеру указанного объема в выбранном направлении y_0 .

ных сопротивлений:

$$\Pi_{vo} = \Pi_{fo} = \frac{\pi n m_{de}^2}{4 x_0 z_0 \cos s_\alpha}, \quad (2.4)$$

где m_{de} — среднее значение эквивалентного диаметра прямолинейных участков индивидуальных капилляров d_{ij} ; s_α — среднее квадратическое отклонение направления прямолинейных участков индивидуальных капилляров α_{ij} от выделенного направления в пористой среде; индекс « j » соответствует номеру прямолинейного участка i -го индивидуального капилляра (рис. 2.4)

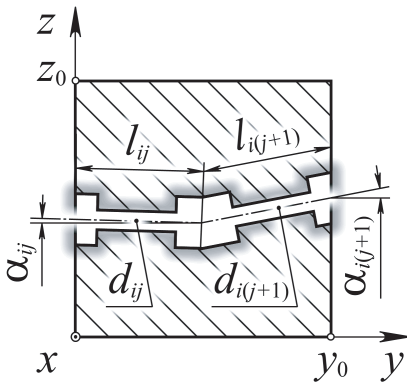


Рис. 2.4. Характерные размеры и расположение капилляров переменного сечения в выделенном объеме пористой среды

неоднородной поперечной структурой и большим отношением характерного линейного размера к толщине области. Следует отметить, что все эти модели практически без изменений обобщаются на случай криволинейных поверхностей в трехмерном пространстве при умеренных значениях их толщины и кривизны.

2.1.3. Регулярные сетевые системы капилляров. Альтернативным направлением развития капиллярных моделей пористых структур в начале 80-х годов прошлого века стала идея представления порового пространства в виде системы или «сети» разветвленных капилляров с множественными ответвлениями и пересечениями [86]. Подобные модели получили название «сетевых» и в последние годы это направление в моделировании пористых структур считается одним из наиболее перспективных. Особенный плодотворным оказалось применение сетевых моделей в исследовании задач нестационарного течения многофазных потоков в пористой среде [65, 67, 68].

Для двумерного случая поровое пространство сетевых моделей строится в виде объединения двух взаимно ортогональных множеств

Удельную поверхность в рассматриваемых моделях определим подобно (2.3):

$$\sigma_{so} = \frac{\pi n m_{de}}{x_0 z_0 \cos s_\alpha}. \quad (2.5)$$

Эффективные показатели для систем каналов переменного сечения по-прежнему совпадают с полными: $\Pi_{vs} = \Pi_{vo}$ и $\Pi_{fs} = \Pi_{fo}$, а коэффициенты связности равны единице: $k_{vs} = k_{fs} = 1$.

Описанные выше капиллярные модели показали удовлетворительную применимость для задач, связанных с процессами переноса в пористых средах с

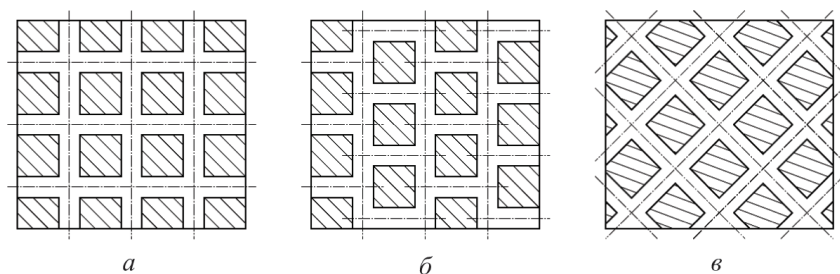


Рис. 2.5. Капиллярные модели пористой среды. Регулярные сетевые модели: а) с коридорным расположением; б) с шахматным расположением; в) диагональная система с шахматным расположением

параллельных каналов (см. рис. 2.5) с коридорным или шахматным расположением сегментов.

При рассмотрении регулярных сетевых моделей шахматное расположение капилляров может быть получено из коридорного двумя способами:

- сдвигом каждого четного слоя сегментов на величину половины шага капилляров;
- поворотом всей капиллярной структуры на некоторый угол относительно преимущественного направления течения.

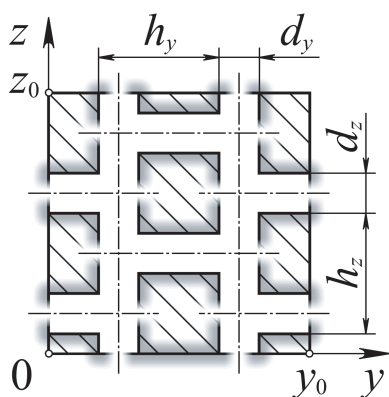


Рис. 2.6. Характерные размеры и расположение ортогональной системы капилляров в выделенном объеме пористой среды

осям.

Для указанных моделей в двумерном случае применяется понятие геометрической пористости Π_g . По аналогии с объемной пористостью

Последний вариант (см. рис. 2.5, в) получил в последнее время наибольшее распространение, так как при всей своей простоте позволяет не только учесть потери давления в капиллярных каналах при повороте потока фильтрующейся жидкости, но и смоделировать хаотическое распределение их локальной проницаемости на простейшей регулярной решетке [66, 128].

Определение эффективных показателей регулярных сетевых структур базируется на выделении повторяющегося элемента с индивидуальными характерными размерами по соответствующим координатным

Π_v , геометрическая пористость структуры Π_g определяется как отношение некоторой меры, найденной для областей с порами $\text{mes } G_p$, к одноименной мере, найденной для всей рассматриваемой области $\text{mes } G_o$

$$\Pi_g = \frac{\text{mes } G_p}{\text{mes } G_o}. \quad (2.6)$$

Тогда геометрическая пористость указанных структур в плоскости переменных (x, z) будет определяться отношением соответствующих площадей, которое можно записать в виде:

$$\Pi_g = \frac{d_y}{h_z} + \frac{d_z}{h_y} - \frac{d_y d_z}{h_z h_y}, \quad (2.7)$$

где d_y , d_z и h_y , h_z — диаметры капилляров и характерные размеры повторяющегося элемента по соответствующим осям (рис. 2.6).

Ввиду очевидной регулярности структуры коэффициенты геометрической связности для приведенных вариантов сетевых моделей равны единице, $k_{gs} = 1$.

Указанные варианты двумерных сетевых моделей легко обобщаются до трехмерных введением дополнительных вертикальных капилляров, расположенных в узлах трехмерной ортогональной решетки [85, 87].

2.2. Матричные модели пористой среды

2.2.1. Регулярные системы сферических частиц. Альтернативным способом представления пористых структур, возникшим практически одновременно с первыми моделями на базе регулярных систем капилляров постоянного сечения, стали модели «*фиктивного грунта* ¹⁾», представляющего собой регулярную засыпку из сферических частиц постоянного диаметра.

Такой способ представления пористой среды означает переход от моделирования капиллярных каналов к моделированию матрицы, образующей пористую структуру. Подобный подход хорошо зарекомендовал себя при моделировании искусственных пористых структур, так как позволяет сравнительно простыми способами учесть особенности технологических процессов, применяющихся при производстве реальных материалов.

Пример построения матричной модели пористой среды в двумерной области из частиц равного диаметра для трех различных значений угла упаковки показан на рис. 2.7.

Для регулярной пористой структуры со сферическими частицами угол упаковки α в простейшем случае определяется как наименьший из углов между двумя прямыми: первая прямая проходит через центры

¹⁾ Этот термин, весьма распространенный в теории фильтрации, по всей видимости был выбран по аналогии с первыми моделями капиллярных структур, получивших название «*идеального грунта*» [27].

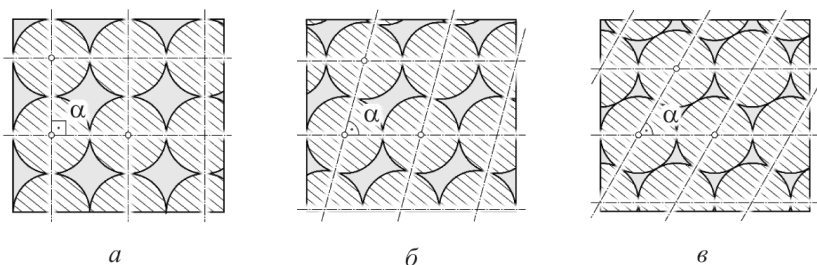


Рис. 2.7. Матричные модели пористой среды. Системы сферических частиц постоянного диаметра: а) упаковка при $\alpha = 90^\circ$; б) упаковка при $\alpha = 75^\circ$; в) упаковка при $\alpha = 60^\circ$

соседних частиц по одному слою, а вторая — через центры соседних частиц на разных слоях.

Важно, что макроскопические структурные характеристики такой среды в основном определяются способом упаковки частиц и в меньшей степени их диаметром. В частности, теоретическое значение объемной пористости Π_v для случая, когда характерные линейные размеры выделенного объема много больше диаметров частиц определяется по формуле Слихтера [162]

$$\Pi_v(\alpha) = 1 - \frac{\pi}{6(1 - \cos \alpha)\sqrt{1 + 2 \cos \alpha}}. \quad (2.8)$$

Вообще говоря, в оригинальной работе автора речь идет о пористости для неограниченной среды, но в упомянутом случае дополнительный объем порового пространства вблизи границы области будет пренебрежимо малым по сравнению с общим объемом пористой среды, что позволяет применять формулу Слихтера в большинстве практических расчетов.

Как видно из указанной формулы, величина пористости для рассмотренной упаковки не зависит от диаметра частицы и изменяется с ростом α в пределах от $\Pi_v(60^\circ) = 0,259$ до $\Pi_v(90^\circ) = 0,476$.

Теоретические значения просветности структуры Π_f в описанном случае также определяются лишь способом упаковки:

$$\Pi_f(\alpha) = 1 - \frac{\pi}{4 \sin \alpha}. \quad (2.9)$$

По характеру функциональной зависимости поверхностная пористость Π_f в основном аналогична объемной и изменяется в пределах от $\Pi_f(60^\circ) = 0,931 \cdot 10^{-1}$ до $\Pi_f(90^\circ) = 2,146 \cdot 10^{-1}$.

Показанные выше примеры демонстрируют лишь простейшие случаи упаковки сферических частиц одного размера и формы, без пропусков и зазоров. Очевидно, что коэффициенты объемной и поверхностной связности в этом случае равны единице: $k_{vs} = k_{fs} = 1$.

2.2.2. Регулярные системы деформируемых частиц. Еще одной разновидностью описанных выше регулярных моделей являются модели деформируемых частиц (см. рис. 2.8). Основные различия между ними состоят в том, что в первом случае значение общего объема пор зависит только от соотношения объемов элемента покрытия и вписанной в него сферической частицы. Во втором случае объем исходной частицы не изменяется, а объем элемента покрытия уменьшается пропорционально третьей степени характерного размера, что приводит к сильной зависимости значения пористости от величины деформации. Заметим, что во многих задачах предполагается, что плотность материала является постоянной величиной $\rho = \text{const}$ и не зависит от деформации частиц ε_h .

$$\varepsilon_h = 2 \frac{h_0 - h_1}{h_0 + h_1} \Rightarrow \frac{h_0}{h_1} = \frac{2 + \varepsilon_h}{2 - \varepsilon_h},$$

где h_0 , h_1 — характерный размер элемента покрытия и вписанной в него частицы до и после деформации (см. рис. 2.8, а).

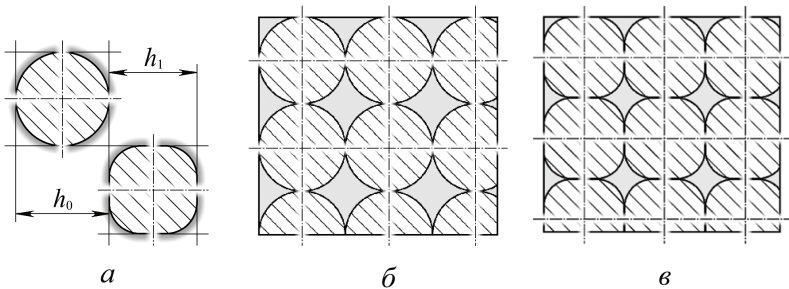


Рис. 2.8. Матричные модели пористой среды. Системы деформируемых частиц: а) изменение элемента покрытия и частицы при симметричной относительно деформации решетки $\varepsilon_h = 0,065$ и постоянном значении угла упаковки $\alpha = 90^\circ$; б) система сферических частиц после деформации: объемная пористость $\Pi_v = 0,364$

Тогда теоретическое значение объемной пористости по аналогии с формулой Сликтера будет определяться лишь способом упаковки и относительной деформацией частиц

$$\Pi_v(\alpha, \varepsilon_h) = 1 - \frac{\pi}{6(1 - \cos \alpha) \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}} \left(\frac{2 + \varepsilon_h}{2 - \varepsilon_h} \right)^3.$$

Для случая, показанного на рис. 2.8, при значении угла упаковки $\alpha = 90^\circ$ и деформации частиц $\varepsilon_h = 0,065 = 6,5\%$ относительное изменение объемной пористости составит $\delta \Pi_v \approx 26,6\%$.

Подобные модели находят применение в задачах, связанных с фильтрацией гетерогенной среды при действии на систему внешних динамических факторов [120, 143]. Изменение характеристик пористых

структур может оказывать существенное влияние на различные массообменные процессы, что находит отражение в комплексных моделях молекулярных и микробиологических систем [83, 113, 114].

Сильная зависимость пористости от степени деформации в пористых материалах с упругими свойствами позволяет говорить о перспективности применения структур с изменяемой геометрией в современных технологических процессах [153, 154].

2.3. Стохастические модели пористой среды

2.3.1. Распределение размеров в пористой среде. Изучение структуры пористой среды показывает, что характерные размеры ее структурных элементов неодинаковы. Эквивалентный диаметр частиц или поровых каналов в реальной среде представляет собой случайную величину, характеризуемую некоторым законом распределения. Следовательно, указанная величина может быть описана с помощью закона распределения в дифференциальной или интегральной форме (см. рис. 2.9).

При эмпирическом построении дифференциального закона распределения по оси абсцисс откладывается среднее значение эквивалентного диаметра частиц (поровых каналов) данной фракции d_{e_i} , а по оси ординат — относительная массовая (объемная) доля p_i , соответствующая статистической оценке вероятности появления данной фракции в выделенном элементарном объеме (элементарной массе) пористой среды

$$p_i = \frac{s(d_{e_i})}{\sum_{i=1}^n s(d_{e_i})}, \quad (2.10)$$

где $s(d_{e_i})$ — масса частиц или объем пор текущей фракции.

Из определения (2.10) вытекает условие нормировки

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (2.11)$$

При построении интегрального закона распределения по оси ординат откладывается сумма относительных объемных или массовых долей P_i для всех фракций от начальной до текущей включительно

$$P_i = \sum_{k=1}^i p_k. \quad (2.12)$$

В соответствии с (2.12) для величины P_i выполняются предельные соотношения

$$P_0 = 0 \quad \text{и} \quad P_n = 1. \quad (2.13)$$

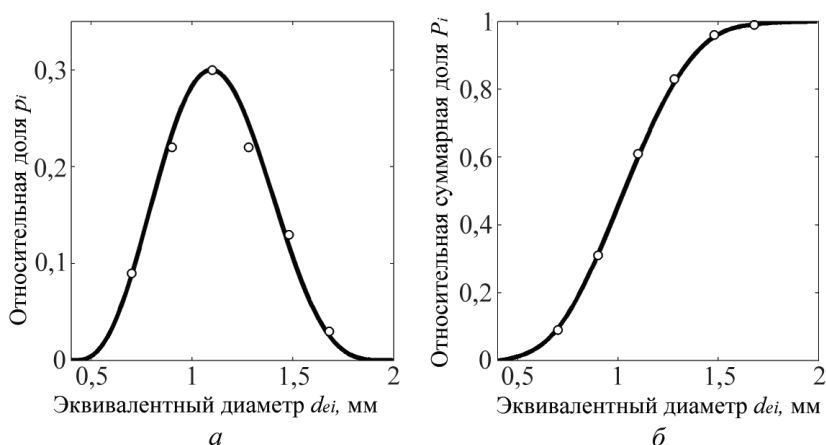


Рис. 2.9. Массовое распределение частиц песчаника по размерам различных фракций [27]: а) дифференциальный закон распределения $p_i(d_{ei})$; б) интегральный закон распределения $P_i(d_{ei})$

Заметим, что несмотря на дискретный характер эмпирических данных, используемых при построении указанных распределений, само распределение исследуемой характеристики в реальной пористой среде стремиться к непрерывному. В связи с этим, после нанесения на график эмпирических данных, рекомендуется использование сглаживающей интерполяции с построением функций распределения в виде непрерывных кривых (см. рис. 2.9).

Приведенные формы закона распределения имеют взаимно однозначное соответствие. Дифференциальная форма закона распределения обычно используется при механическом анализе фракционного состава и связана с определением среднего эффективного диаметра частиц пористой среды, а интегральная чаще применяется для оценки эквивалентного диаметра капилляров в экспериментальных исследованиях вынужденного движения жидкостей и газов в пористой среде.

2.3.2. Стохастические системы капилляров. Эволюция представлений капиллярно-пористых структур на регулярной исходной решетке привела к идеям применения современных алгоритмических методов для моделирования стохастических систем капилляров с заданными свойствами, получившим распространение в задачах перколяции или «протекания».

В наиболее общей постановке в задачах перколяции рассматривается динамика распространения фронта одной жидкости в пористой среде, насыщенной другой жидкостью или газом. Таким образом, в задачах перколяции рассматривается начальная фаза процесса фильтрации жидкостей и/или газов в пористой среде. Характерной особенностью процесса перколяции является чрезвычайно неустойчивый характер,

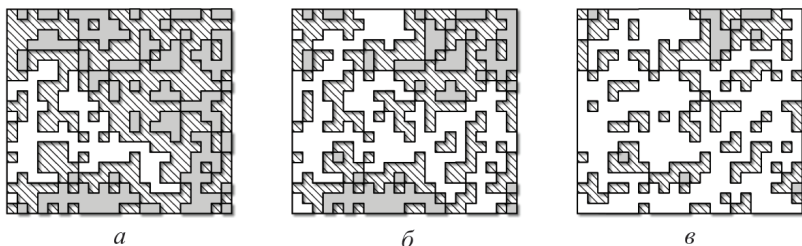


Рис. 2.10. Стохастические модели пористой среды. Перколяционная система капилляров на регулярной решетке: а) геометрическая пористость $\Pi_g = 0,477$; эффективная пористость $\Pi_e = 0,177$; б) $\Pi_g = 0,561$; $\Pi_e = 0,389$; в) $\Pi_g = 0,666$; $\Pi_e = 0,627$

оказывающий существенное влияние на дальнейшее развитие всего процесса фильтрации. Более подробный обзор современного состояния исследований по процессам перколяции в пористой среде будет сделан в разделе 3.4.

Простейший вариант синтеза капиллярной перколяционной модели состоит из следующих этапов.

1. Определяется геометрия моделируемой области, ее макроскопические характеристики и граничные условия. Затем в области формируется регулярная (как правило прямоугольная) решетка узлов.
2. Выбирается начальное приближение значения геометрической пористости Π_g и формируется множество узлов, содержащих поры.
3. Начинается процесс инъекции жидкости в соответствии с установленными граничными условиями. Заметим, что распространение жидкости возможно только по узлам решетки, непосредственно связанным с источником. По завершении роста перколяционных кластеров полученная структура фиксируется в качестве капиллярной модели пористой среды.
4. С учетом связности определяется эффективное значение геометрической пористости и другие характеристики полученной структуры.

Из-за неопределенности выбора начального приближения для геометрической пористости Π_g на базе второго и третьего этапов может быть построен итерационный процесс с соответствующей коррекцией начальных условий по выбранным критериям на четвертом этапе.

Примеры капиллярных пористых структур, построенные с помощью вышеописанной перколяционной модели на регулярной квадратной решетке размером 22×20 узлов при начальных значениях геометрической пористости $\Pi_g^{(0)} = \{0,475; 0,575; 0,675\}$ приведены на рис. 2.10.

Как следует из определения, эффективная пористость решетки Π_e в перколяционных моделях не превышает геометрической и стремится к последней по мере роста ее значений. Очевидно, что коэффици-

ент связности перколяционных моделей также не превышает единицы и в показанных случаях равен $k_{gs} = \{0,371; 0,693; 0,941\}$.

Протекание на большей части граничных узлов наступает при значении геометрической пористости выше так называемого «порога протекания» $P_g = 0,59275 \pm 0,0003$ [176], что вполне согласуется с представленными результатами моделирования.

Отметим, что подобие перколяционных кластеров на рис. 2.10 обусловлено инвариантностью псевдослучайной последовательности, задающей матрицу размещения пор по узлам регулярной решетки. При выборе других начальных условий общий вид и эффективные характеристики перколяционных кластеров могут отличаться от приведенных выше.

2.3.3. Стохастические системы частиц. При наличии частиц различных размеров пористая среда приобретает выраженный стохастический характер с дисперсией локальных характеристик в весьма широком диапазоне. Один из простейших методов построения матричных моделей подобных структур включает в себя несколько этапов.

1. На первом этапе производят дискретизацию пористой среды в соответствии с законом распределения на несколько фракций, состоящих из частиц с условно одинаковыми эффективными размерами.
2. На втором этапе разделяют частицы каждого размера на отдельные слои. В пределах каждого слоя формируется заданное (например, равномерное) статистическое распределение частиц текущего размера.
3. На третьем этапе производят совмещение проекций отдельных слоев на одну общую плоскость¹⁾. После совмещения проекции некоторых частиц будут перекрываться (полностью или частично), в результате чего их численность уменьшится, но из отдельных частиц сформируется единая матрица, обладающая достаточно сложной структурой (см. рис. 2.11, а).
4. На четвертом этапе вычисляются эффективные показатели полученной структуры и производится их сопоставление с заданными показателями.

Заметим, что в рамках описанного подхода априорная оценка значений эффективных показателей пористой среды формулируется в виде доверительных интервалов с заданным уровнем надежности. Точность указанных оценок в этом случае определяется численностью и статистическими показателями фракций, составляющих пористую среду.

¹⁾ Приведенная последовательность описывает процесс формирования модели в евклидовом пространстве двух измерений. При необходимости, данный алгоритм может быть легко *расширен* на случай евклидова пространства трех или большего числа измерений.

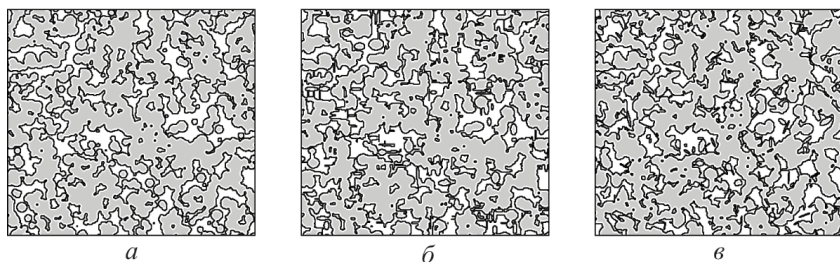


Рис. 2.11. Стохастические модели пористой среды. Система перекрывающихся частиц: а) круглые частицы с дисперсией эффективного размера при значении геометрической пористости структуры $\Pi_g = 0,281$; б) эллиптические частицы с дисперсией размера и эксцентриситета при $\Pi_g = 0,293$; в) эллиптические частицы с дисперсией размера, эксцентриситета и направления главных осей при $\Pi_g = 0,289$

Указанный алгоритм без существенных изменений может применяться и для частиц несферической формы, что позволяет создавать модели весьма близкие по своим характеристикам к реальным объектам. Хорошие результаты в моделировании пористых структур дает применение частиц эллиптической формы с произвольной ориентацией в пространстве и отношением главных осей эллипсов [153, 169].

Для их реализации в рамках описанного алгоритма, помимо законов распределения размеров и координат частиц, потребуется также установить законы изменения эксцентриситета и угла поворота осей симметрии для частиц каждой фракции.

Примеры построения подобных моделей в двумерном случае показаны на рис. 2.11. Моделирование производилось для системы состоящей из 1500 эллиптических частиц в прямоугольной области с инвариантным фракционным составом и пространственным распределением.

В первом случае система состоит из круглых частиц с дисперсией эффективного размера (рис. 2.11, а), во втором случае — из эллипсов с дисперсией эффективного размера и эксцентриситета (рис. 2.11, б), а в третьем — из эллипсов с дисперсией эффективного размера, эксцентриситета и направления осей симметрии (рис. 2.11, в).

Незначительные вариации величины геометрической пористости Π_g в полученных структурах объясняются зависимостью площади перекрытия соседних проекций эллипсов от величины эксцентриситета и угловой ориентации соседних частиц. Максимальное значение степени неравномерности по геометрической пористости такой матрицы, определяемое как $\delta_{\Pi_g} = \Delta\Pi_g / \bar{\Pi}_g$, не превышает нескольких процентов по абсолютной величине: $|\delta_{\Pi_g}| \leq 0,041$.

Дополнительно следует отметить, что приведенные на рис. 2.11 стохастические модели перекрывающихся частиц допускают описание с помощью перколяционных моделей, построенных на непрерывном множестве [106, 142]. Фактически, они представляют собой обобщен-

ный случай рассмотренных ранее дискретных перколяционных моделей. В то же время в работе [164] показано, что предельные показатели перколяционных кластеров на дискретной решетке слабо зависят от параметров самой решетки. Это позволяет говорить о принадлежности капиллярных и матричных стохастических моделей к одному классу.

2.4. Классификация структурных моделей пористой среды

Внутреннее пространство большинства реальных проницаемых структур образовано сильно искривленными каналами нерегулярной формы с переменной площадью поперечного сечения (см. примеры на рис. 1.1). Изменение характерных размеров поровых каналов в широком диапазоне, наличие множественных самопересечений, изолированных областей и глухих ответвлений в поровом пространстве, а также весьма неоднородная шероховатость поверхности каналов привели к тому, что в первых исследованиях пористых структур применялись весьма отдаленные от реальности гипотетические модели. Поэтому, несмотря на кажущееся многообразие существующих моделей, большая часть из них различается незначительно и не учитывает многих особенностей реальных объектов.

Представляется, что при построении классификации подавляющего большинства теоретических моделей пористых структур следует выделить две группы основных показателей:

- а) связность, непрерывность и фазовое состояние структуры;
- б) размерность и регулярность моделируемой структуры.

Кроме того, следует учитывать такие вопросы, как способы формирования результирующей структуры, а также механизмы взаимодействия различных масштабных уровней как в пределах одной структурной единицы, так и между соседними единицами одной или различных фаз. Однако, в существующих работах по теоретическому моделированию пористых структур указанные вопросы разработаны явно недостаточно для построения на их основе сколько-нибудь полной классификации.

2.4.1. Связность структуры. С точки зрения выделенной структурной единицы основным показателем является характер ее связей с окружающими структурными единицами. Уровень связности отдельных структурных единиц в пористой среде сильно зависит от выбранного масштаба и описывается следующими основными случаями:

- а) *нульсвязная* структура — структурная единица не имеет общих точек с окружающими; этот случай характерен для дисперсных сред и изолированных областей;
- б) *односвязная* структура — структурная единица имеет лишь одну общую точку с окружающими; этот случай характерен для глу-

хих ответвлений на межфазных границах областях в пористой среде;

- в) *многосвязная структура* — количество связей структурной единицы составляет две и более; такие структуры характерны для внутренних областей пористой среды.

2.4.2. Непрерывность структуры. Перенос акцента с отдельной структурной единицы на множество таких единиц, образующих отдельную фазу в пористой среде, позволяет выделить следующие базовые уровни по показателю непрерывности:

- а) *плотная структура* — в моделируемой области формируется единая структура, включающая в себя практически все структурные единицы в пределах выделенной фазы; число одно- или нульсвязных структурных единиц много меньше общего их числа;
- б) *разреженная структура* — в моделируемой области формируется множество локализованных структурных единиц, слабо связанных друг с другом; число структурных единиц с одной связью сопоставимо с общим их числом;
- в) *дисперсная структура* — почти полная локализация всех структурных единиц в границах выделенной подобласти; число многосвязных структурных единиц много меньше общего их числа.

2.4.3. Фазовое состояние структуры. Фазовое состояние элементов структуры пористой среды является еще одним независимым параметром классификации. Фазовое состояние любого структурного элемента в любой момент времени определяется по допустимому набору фазовых состояний исходного вещества, однако для теоретических моделей пористых структур важно выделить состояние следующих основных компонентов:

- а) *образующая фаза* — вещество (или совокупность веществ), формирующее матрицу пористой среды и образующее ее основную структуру; обычно имеет твердое поликристаллическое, либо аморфное состояние;
- б) *заполняющая фаза* — вещество, находящееся в поровом пространстве и образующее, вместе с матрицей, единую гетерогенную систему; в момент заполнения порового пространства обычно имеет жидкое или газообразное состояние; в общем случае заполняющая фаза сама может быть многофазной;
- в) *диспергированная фаза* — вещество, находящееся в распыленном состоянии на поверхности раздела пористой матрицы и/или в объеме заполняющей фазы; в общем случае диспергированная фаза может быть многофазной и образовывать собственные структурные единицы как с поверхностью раздела образующей фазы, так и с другими структурными единицами одноименной фазы.

2.4.4. Размерность структуры. Размерность является одной из основных характеристик внутренней структуры любого однородного множества. В связи с высокой сложностью реалистичных моделей пористой среды в настоящей классификации выделены три основных типа организации структурных единиц:

- а) *предфрактальная* структура — формируемые структурные единицы рассматриваются на одном масштабном уровне; самоподобием и инвариантностью к преобразованиям подобия полученная структура не обладает; размерность множества точек, образующих моделируемую структуру, равна топологической размерности «несущего» множества;
- б) *монофрактальная* структура — формируемые структурные единицы проявляют свойства самоподобия или самоаффинности (в том числе статистической) в пределах некоторого ограниченного диапазона масштабов; размерность множества точек, образующих моделируемую структуру, постоянна и не превосходит размерности «несущего» множества;
- в) *мультифрактальная* структура — формируемые структурные единицы представляют собой совокупность подмножеств, проявляющих свойства самоаффинности (в том числе статистической) в широком диапазоне масштабов с различными показателями; размерности множества точек, составляющих моделируемую структуру, образуют непрерывный спектр, максимальное значение которого не превосходит размерности «несущего» множества.

2.4.5. Регулярность структуры. Представление об упорядоченности исследуемой структуры непосредственно связано с понятием «хаоса», игравшим ключевую роль в мировоззрении человека с древнейших времен. Не вдаваясь в исторические подробности, отметим, что некоторые положения, выведенные еще античными философами, сохраняют свою актуальность и по сей день. Так, по представлениям учеников школы Платона, хаос — состояние материи, которое остается после устранения всех возможностей для проявления ее свойств. С другой стороны, из хаоса возникает все, что составляет содержание мироздания, в том числе и «порядок».

В современной физике понятия «хаос» и «хаотическое движение и/или структура», являются фундаментальными, хотя и недостаточно определенными. Так, в интерпретации Больцмана, предельным случаем хаотического движения является движение элементов термодинамической системы в состоянии равновесия. До последнего времени было принято считать хаотической структуру линий тока в турбулентном движении жидкости. Однако, сравнительно недавно было выяснено наличие упорядоченной эволюционной структуры в подобных системах, названной «динамическим хаосом» [134].

На данном этапе происходит формирование нового взгляда на природу «хаоса». В частности, происходит разделение понятий «сложности» и «хаотичности», уточняется определение «физического хаоса» [62]. Особое место в этой работе занимает исследование вопросов по поиску и анализу источников хаоса в открытых системах, а также выработка критериев для оценки «нормы хаотичности» таких систем [20]. Определение нормы хаотичности/упорядоченности в различных прикладных задачах на современном этапе развития представляется достаточно сложным и мало исследованным вопросом. В связи с этим, в предлагаемой классификации, выделено лишь две характеристики упорядоченности — *регулярность* и *анизотропность* моделируемой структуры.

Для первой характеристики приняты три основных уровня, качественно определяющих степень регулярности в рассматриваемом случае:

- а) *регулярная* структура — значения структурных показателей практически постоянны в пределах всей моделируемой области и мало зависят от текущего масштаба;
- б) *локально-регулярная* структура — значения структурных показателей образуют дискретное множество с числом элементов, сопоставимым с числом структурных единиц; указанные значения существенно зависят от текущего масштаба;
- в) *хаотическая* структура — значения структурных показателей в пределе образуют непрерывное множество; указанные значения существенно зависят от текущего масштаба.

2.4.6. Анизотропность структуры. Еще один показатель, позволяющий оценить упорядоченность рассматриваемых моделей пористых структур — это степень их анизотропности. Физически свойство анизотропии проявляет себя в виде зависимости характеристик какой-либо фазы моделируемой среды от выбранного направления. Применительно к структурному моделированию пористых сред можно выделить следующие случаи проявления анизотропии:

- а) *анизотропная* структура — характеризуется наличием малого числа выделенных направлений с ярко выраженным различием по какой-либо из физических характеристик; максимальное отклонение для значений любой из указанных характеристик в малой окрестности каждого направления много меньше максимального отклонения характеристики по всему диапазону направлений и не зависит от текущего масштаба; величина и количество выделенных направлений мало зависят от текущего масштаба моделируемой структуры;
- б) *локально-анизотропная* структура — число выделенных направлений сопоставимо с числом структурных единиц; максималь-

ное отклонение для значений любой из указанных характеристик в малой окрестности каждого направления много меньше максимального отклонения характеристики по всему диапазону направлений, но сильно зависит от текущего масштаба; величина и количество выделенных направлений также зависят от текущего масштаба моделируемой структуры;

- в) *изотропная* структура — число выделенных направлений в рассматриваемом диапазоне масштабов моделируемой структуры много больше числа структурных единиц; максимальное отклонение для значений любой из указанных характеристик по всему диапазону направлений сопоставимо с погрешностью их регистрации и не зависит от текущего масштаба.

Глава 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

До начала XX века основным инструментом для моделирования явлений окружающего мира считались дифференциальные уравнения и их строго детерминированные решения. Значительная часть современных успехов математического моделирования так или иначе связана с концепцией *динамической системы*. Применение указанной концепции дало возможность абстрагироваться от конкретной физической природы объекта и описывать его состояние с помощью набора *динамических переменных*. Изменение динамических переменных означает изменение соответствующего состояния объекта, осуществляемое с помощью *эволюционного оператора*.

Геометрически мгновенному состоянию динамической системы соответствует *изображающая точка* в *фазовом пространстве*. Тогда изменению состояния системы во времени (так называемой *динамике системы*) будет соответствовать движение изображающей точки по *фазовой траектории*. При наличии в динамической системе *диссипации энергии* ее состояние, по прошествии определенного промежутка времени, становится *установившимся* и не зависит от малых вариаций в начальных условиях. Множество точек фазового пространства, посещаемых динамической системой на установившемся режиме, называется притягивающим множеством или *аттрактором*.

Однако для целого ряда динамических систем характерно наличие особых режимов, когда сколь угодно малая вариация в начальных условиях быстро нарастает во времени и, спустя некоторое конечное время, состояние системы становится непредсказуемым. Для таких режимов характерно крайне нерегулярное *хаотическое* изменение динамических переменных во времени. В фазовом пространстве таким режимам соответствуют *странные аттракторы* — притягивающие множества, обладающие стохастически самоаффинной структурой.

В начальный период своего развития в теории динамических систем было распространено представление, что, задав необходимые начальные данные, можно будет с определенностью предсказывать поведение системы в будущем и исключения возможны лишь для ограниченного класса «*достаточно сложных*» систем. Возникшая позднее концепция динамического хаоса наглядно продемонстрировала, что даже достаточно простые динамические системы уравнений способны демонстрировать существенно непредсказуемое поведение.

Разумеется, вполне можно рассчитывать на точное предсказание поведения такой системы при наличии *строго определенных* начальных условий, но любая *сколь угодно малая* погрешность в их определении столь быстро возрастает во времени, что практически можно рассчитывать на предсказуемость такой системы лишь на ограниченном интервале времени. Это время, в течение которого система с хаотической динамикой переходит к ограниченно предсказуемому состоянию под действием малых возмущений в начальных условиях, в работах Дж. Лайтхилла [133] получило название «*горизонта предсказуемости*».

Само по себе наличие хаоса не вызывало удивления, поскольку лучше согласовывалось с повседневным опытом, чем полная предсказуемость. Однако существование детерминированных моделей, способных вполне адекватно описывать реальность, показывало, что окружающий мир не полностью случаен и появление моделей с ограничено предсказуемым поведением заполнило вакантное место между этими двумя крайними случаями.

3.1. Характеристики стохастических процессов

Современные исследования показывают, что одними из важнейших характеристик структур, возникающих при моделировании стохастических процессов, являются показатели их подобия и размерности. Необходимость иметь дело не с одной, а с несколькими видами различных характеристик связана в конечном итоге с разнообразием структуры стохастических процессов. Подробный анализ методов определения размерностей и показателей подобия, а также их взаимная корреляция заслуживают отдельного рассмотрения. В данном разделе мы ограничиться лишь некоторыми определениями наиболее распространенных видов размерности и введем общую систему для их обозначения.

3.1.1. Топологическая размерность. Как уже было сказано выше, понятие *топологической размерности* в естественных науках связано с числом независимых величин, однозначно определяющих положение элемента, принадлежащего данному множеству. Значения указанных величин в общем случае определяются с помощью процедуры покрытия исходного множества каким-либо другим, выбранным в качестве меры. Заметим, что система подмножеств $\{U_i\}$ топологического пространства X называется его покрытием, если для каждой точки x , принадлежащей топологическому пространству верно, что

$$\forall x \in X \quad \exists U_i \in \{U_i\} \quad | \quad x \in U_i.$$

Кратностью покрытия $\{U_i\}$ называется наибольшее из целых неотрицательных чисел n таких, что всегда существует по крайней мере одна точка, принадлежащая n различным элементам покрытия U_i од-

новременно. Известно, что всякое замкнутое ограниченное множество допускает ε -покрытие $\forall \varepsilon > 0$, т.е. может быть представлено в виде объединения конечного числа замкнутых множеств $\{E_i\}$, каждое из которых имеет диаметр $d_i < \varepsilon$.

Тогда *топологической* или *брауэровской размерностью* замкнутого ограниченного множества X называется наименьшее из таких целых неотрицательных чисел $n \geq 0$, что всякое покрытие множества X можно вписать в ε -покрытие кратности $k \leq n + 1$.

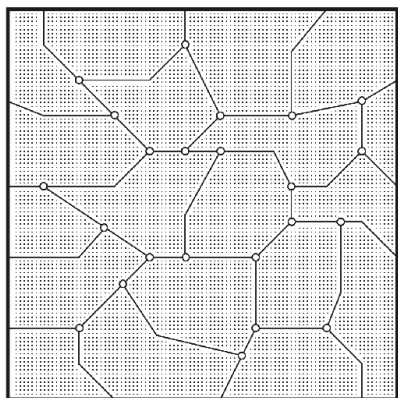


Рис. 3.1. Пример покрытия замкнутого ограниченного множества X при $n = 2$

Геометрический смысл приведенного определения легко уяснить из примера, показанного на рис. 3.1. Для всякого замкнутого ограниченного множества на плоскости ($n = 2$) из этого определения следует, что указанное множество может быть разбито на сколь угодно мелкие подмножества таким образом, что произвольная точка границы этих подмножеств будет принадлежать не более, чем трем таким подмножествам одновременно $k \leq 2 + 1$. На рис. 3.1 символом \circ отмечены точки, для которых выражение $k \leq 3$ обращается в строгое равенство.

3.1.2. Размерность Хаусдорфа. Более общий подход к определению понятия размерности позволяет получить на ее основе и другие топологические характеристики исследуемого множества. Уже к концу XIX в. в математике было известно достаточное количество объектов, обладающих аномальными с точки зрения классической топологии свойствами.

Фундамент для их изучения появился после публикации в 1919 г. Ф. Хаусдорфом работы [116], в которой он сформулировал общее определение d -меры некоторого множества для неотрицательного действительного числа $d \geq 0$, $d \in \mathbb{R}$. При таком определении размерность указанных множеств принимает действительные значения, меньшие топологической размерности «несущего» их множества. Последующее развитие этой идеи, принадлежащее талантливому русскому математику А.С. Безиковичу, привело к формированию теории множеств с дробной размерностью в самостоятельный раздел математики.

Классическое определение d -меры компактного множества, заданного в n -мерном векторном пространстве, записывается в следующем

виде:

$$\mu_d = \gamma(d) \cdot r^d; \quad \gamma(d) = \frac{\Gamma(2^{-d})}{\Gamma(1 + 2^{-1})}, \quad (3.1)$$

где $d = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$; $\Gamma(x)$ — гамма-функция, определяемая для значений $x > 0$ как

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Переносим понятие d -меры (3.1) на случай произвольного ограниченного подмножества $E \subset X$ и определяя для него соответствующее ε -покрытие с радиусами $r_i < \varepsilon$, получим

$$\mu_H(E, d, \varepsilon) = \inf \sum_i r_i^d, \quad (3.2)$$

где инфимум ¹⁾ берется по всем ε -покрытиям подмножества E . Из (3.2) следует, что функция $\mu_H(E, d, \varepsilon)$ не убывает при уменьшении ε , а поэтому существует (возможно бесконечный) предел, называемый d -мерой Хаусдорфа

$$\mu_H(E, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_H(E, d, \varepsilon). \quad (3.3)$$

Анализ выражения (3.3) показывает, что при фиксированном E существует критическое значение $d = d_H \geq 0$ ($d \in \mathbb{R}$), называемое *размерностью Хаусдорфа* (H -размерностью) такое, что

$$\mu_H(E, d) = \begin{cases} \infty & \text{при } d < d_H; \\ 0 & \text{при } d > d_H. \end{cases} \quad (3.4)$$

Можно показать, что для фиксированного множества E , вложенного в n -мерное евклидово пространство, размерность Хаусдорфа d_H не может быть меньше топологической размерности d_T данного множества E и не превышает топологической размерности пространства $d_T(E) : \leq d_H(E) \leq n$.

3.1.3. Самоподобие и самоаффинность. Одновременно с появлением работы Ф. Хаусдорфа вышла в свет серия работ французских математиков Г. Жулиа [123] и П. Фату [98–100], заложившая функциональные основы современной теории динамических систем.

Последующее развитие указанных направлений происходило практически независимо друг от друга до появления в 1967 г. публикации Б. Мандельброта [135], обозначившей появление нового раздела в прикладной математике. Введение терминов «фрактал», «фрактальная размерность» и «фрактальная геометрия» вместе с широчайшим обзором

¹⁾ Заметим, что инфимумом, $\inf X$, называется точная нижняя грань множества X , удовлетворяющая следующим условиям: а) $\forall x \in X \mid x \geq \inf X$; б) $\forall \delta > 0 \exists x \in X \mid x < \inf X + \delta$.

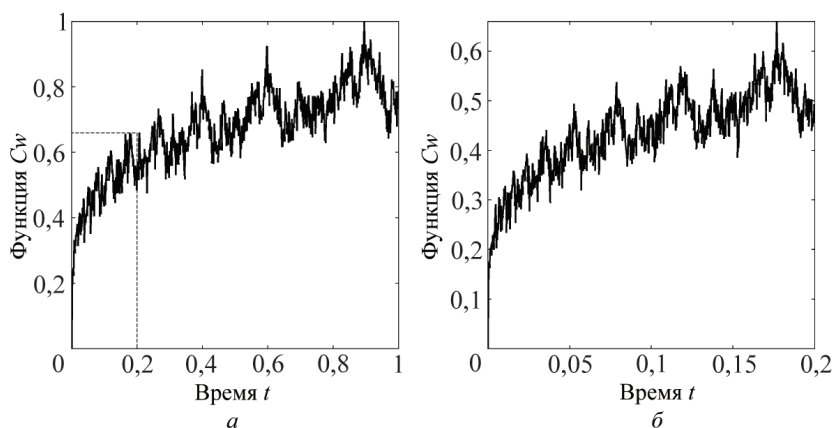


Рис. 3.2. Две реализации фрактальной функции $C_w(t)$ для различных временных интервалов: а) $0 \leq t \leq 1$; б) $0 \leq t \leq 0,2$.

ром их приложений в классических работах [139, 140] спровоцировали настоящий взрыв интереса к данной тематике.

Одним из классических примеров фрактального множества служит всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая косинусоида Вейерштрасса, являющаяся частным случаем комплексной функции Вейерштрасса-Мандельброта [71]

$$C_w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos b^n t}{b^{(2-D)n}}, \quad (3.5)$$

где b, D — постоянные параметры, имеющие смысл масштаба и размерности для данной реализации $C_w(t)$.

Принципиальное значение имеет вопрос о степени подобия фрактальных структур. На рис. 3.2 показаны примеры построения косинусоиды Вейерштрасса $C_w(t)$ для двух различных временных интервалов. Сопоставление указанных графиков позволяет выделить одно из характеристических свойств фрактальных объектов [141]: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому».

В связи с чрезвычайным разнообразием фрактальных структур выделяют самоподобные, самоаффинные и статистически самоаффинные (стохастические) фракталы. Основное различие между этими случаями состоит в реакции их структурных характеристик на преобразование масштаба.

Ограниченное фрактальное множество F самоподобно с коэффициентом подобия r , если оно является объединением n непересекающихся

подмножеств F_1, \dots, F_n , каждое из которых конгруэнтно ¹⁾ множеству $r(F)$, получаемому из F с помощью преобразования подобия с показателем r .

Ограниченное фрактальное множество F *самоаффинно* по отношению к вектору подобия \vec{r} , если оно является объединением n непересекающихся подмножеств F_1, \dots, F_n , каждое из которых конгруэнтно множеству $\vec{r}(F)$, получаемому из F с помощью аффинного преобразования, определяемого вектором \vec{r} .

Ограниченное фрактальное множество F *статистически самоаффинно* по отношению к вектору подобия \vec{r} , если оно является объединением n непересекающихся подмножеств F_1, \dots, F_n , каждое из которых обладает теми же статистическими характеристиками, что и множество $\vec{r}(F)$, получаемое из F с помощью аффинного преобразования, определяемого вектором \vec{r} .

Помимо этого нельзя не упомянуть о возможности построения фрактальных структур в виде так называемых *мультифракталов* — взаимосвязанных фрактальных подмножеств с различными, в общем случае, показателями подобия и размерности [137, 138].

3.1.4. Размерность Минковского. Близкими свойствами к размерности Хаусдорфа обладает характеристика, выведенная в собственных целях Г. Минковским и получившая дальнейшее развитие в работах Дж. Булигана [76]. Определяя d -меру аналогично (3.2) для случая ε -покрытия с фиксированным радиусом $r_i = r < \varepsilon$ можно получить определение *размерности Минковского* (M -размерности) в виде

$$d_M(E) = \inf \{d \mid \mu_M(E, d) = 0\}. \quad (3.6)$$

Геометрический смысл приведенного определения размерности Минковского (3.6) в общих чертах можно уяснить из следующей иллюстрации [161]. Пусть центр круга фиксированного радиуса r движется вдоль некоторой плоской кривой (см. рис. 3.3). Очевидно, что площадь, застилаемая этим кругом при движении (площадь Минковского), будет зависеть от выбранного радиуса: $F = F(r)$. Тогда отношение застигаемой площади к удвоенному радиусу круга при стремлении последнего к нулю будет стремиться к некоторой величине

$$L = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(r)}{2r}. \quad (3.7)$$

В случае обычной гладкой кривой отношение, стоящее под знаком предела (3.7), оказывается пропорциональным величине r^{1-d_M} , которая имеет конечное значение, так как $d_M = 1$. Для фрактальных кривых значение $d_M > 1$, и предел r^{1-d_M} при $r \rightarrow 0$ будет расходящимся.

¹⁾ Свойство *конгруэнтности* означает, что множество точек F_i совпадает с множеством $r(F)$ после совокупности преобразований *поворота* и/или *переноса*.

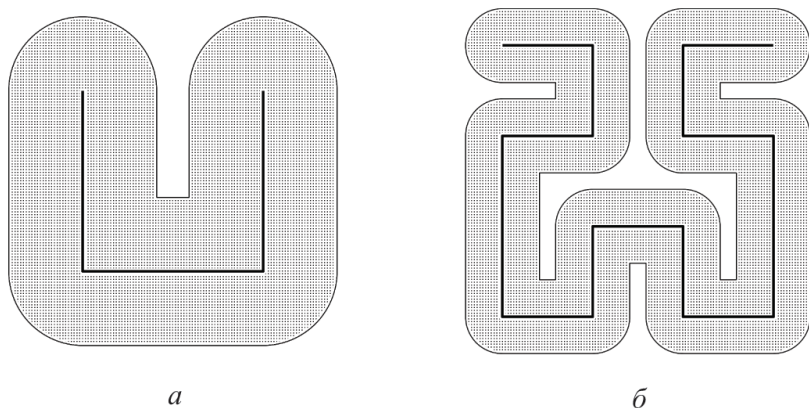


Рис. 3.3. Пример построения площади Минковского $F(r)$ при определении M -размерности d_M для первого (а) и второго (б) поколений открытой самоподобной кривой Пеано-Гильберта

Величина d_M служит мерой скорости этого расхождения, и для плоской кривой выражается в виде

$$d_M = 2 - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln F(r)}{\ln r}. \quad (3.8)$$

Определение размерности Минковского позволяет получить оценку верхнего предела размерности Хаусдорфа для соответствующего множества $d_H \leq d_M$. Предполагается, что для всех конструктивных (строго самоподобных) фракталов имеет место равенство $d_H = d_M$.

Помимо размерности Минковского, еще один из весьма распространенных способов определения размерности фрактальных множеств [139] строится на вычислении предела отношения логарифма числа n -мерных кубических элементов евклидова пространства $N(r)$, необходимых для покрытия заданного множества, к логарифму размера элемента r при стремлении последнего к нулю. Указанная величина d_B получила название *клеточной* или *B-размерности* множества. Ее определение для n -мерного евклидова пространства записывается аналогично (3.8):

$$d_B = n - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln r}. \quad (3.9)$$

3.1.5. Информационная размерность. Изучение фрактальной структуры аттракторов динамических систем с внутренним хаосом приводит к необходимости учета частоты прохождения системой по близком или совпадающим траекториям в фазовом пространстве. Размерности, определяемые с учетом вероятностной меры посещения траекторией различных областей в фазовом пространстве, называют вероятностными [97, 167].

Информационная емкость выделенного n -мерного куба в фазовом пространстве определяется в соответствии с выражением

$$I(r) = \sum_{i=1}^{N(r)} p_i \cdot \ln p_i, \quad (3.10)$$

где $I(r)$ — количество информации, необходимое для определения состояния системы с ошибкой, не превосходящей r ; $N(r)$ — число n -мерных кубов со стороной r , необходимых для покрытия аттрактора исследуемой динамической системы; p_i — вероятность попадания произвольной точки фазовой траектории в текущий выделенный объем.

В таком случае, аналогично определению клеточной размерности, из (3.9) с учетом (3.10) можно получить предел отношения логарифма информационной емкости выделенного объема $I(r)$ к логарифму его линейного размера r при стремлении последнего к нулю в качестве *информационной* или I -размерности рассматриваемого множества

$$d_I = n - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln I(r)}{\ln r}. \quad (3.11)$$

Из (3.11) следует, что для малых r имеет место приближенное равенство $I(r) \approx (n - d_I) \cdot \ln r$. Тогда d_I характеризует скорость возрастания количества информации по мере уменьшения r . Сравнение выражений (3.9) и (3.11) показывает, что если аттрактор исследуемой динамической системы обладает пространственно однородной структурой, то $d_I = d_B$, в противном случае $d_I < d_B$.

3.1.6. Корреляционная размерность. Рассмотрение обобщенных характеристик аттракторов позволяет вывести определение еще одной вероятностной размерности: *корреляционной* или C -размерности [108, 109]. Указанная величина определяется как предел отношения логарифма суммы вероятностей двух последовательных прохождений системой выделенного объема в фазовом пространстве к логарифму размера ячейки r при стремлении последнего к нулю

$$d_C = n - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(r)} p_i^2}{\ln r}. \quad (3.12)$$

Статистическая оценка предела суммы p_i^2 для больших $N(r)$ в теории динамических систем носит название корреляционного интеграла $C(r)$,

$$C(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{N(r)^2} \sum_{i,j=1}^{N(r)} h(r - \rho(x_i, x_j)), \quad (3.13)$$

где x_i, x_j — две произвольные точки фазовой траектории динамической системы; $\rho(x_i, x_j)$ — расстояние между точками x_i, x_j в фазовом пространстве; $h(x)$ — функция Хэвисайда такая, что

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда выражение (3.12) можно представить в виде

$$d_C = n - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r}. \quad (3.14)$$

Таким образом, корреляционная размерность d_C определяется значением корреляционного интеграла $C(r)$, который характеризует относительное число пар точек x_i, x_j , разделенных в фазовом пространстве расстоянием, меньшим r .

3.1.7. Обобщенные размерности. В 1983 г. П. Грассбергер [107], а также Г. Хэнтчел и И. Прокачиа [117] впервые применили в нелинейной динамике семейство *обобщенных*¹⁾ или Q -размерностей в качестве фрактальной характеристики странных аттракторов. Их определение включает в себя все ранее описанные виды размерностей как частные случаи в зависимости от значения параметра q . Определение обобщенной размерности d_Q базируется на представлении корреляционного интеграла в виде

$$Q(r, q) = \sum_{i=1}^{N(r)} p_i^q \quad (3.15)$$

с последующим умножением всего предела на масштабирующий коэффициент $1/(q-1)$

$$d_Q = n - \frac{1}{q-1} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln Q(r, q)}{\ln r}, \quad (3.16)$$

где $Q(r, q)$ — корреляционный интеграл порядка q . В характерных частных случаях имеем:

- а) при значении параметра $q = 0$ обобщенная размерность соответствует клеточной размерности множества $d_Q(0) = d_B$;
- б) при значении $q = 1$ обобщенная размерность равна информационной размерности $d_Q(1) = d_I$;
- в) при $q = 2$ обобщенная размерность равна корреляционной размерности $d_Q(2) = d_C$.

Кроме того, выделяют два предельных случая: максимальной $\lim_{q \rightarrow -\infty} d_Q(q)$ и минимальной $\lim_{q \rightarrow +\infty} d_Q(q)$ обобщенной размерности. Они

¹⁾ У ряда авторов обобщенные размерности носят название *размерностей Реньи*, по имени венгерского математика, ранее предложившего их в нескольких контекстах [151].

достигаются при стремлении параметра q соответственно к минус и плюс бесконечности.

Из определения (3.15), (3.16) следует, что размерность d_Q — монотонная убывающая функция, т.е. для любых $q < q_0$ выполняется неравенство $d_Q \geq d_{Q_0}$. Равенство достигается только в случае пространственно однородных аттракторов.

Большие положительные значения q соответствуют наиболее «плотным» областям в фазовом пространстве, тогда как большие отрицательные значения q означают редко посещаемые области. Таким образом, размах значений обобщенной размерности может рассматриваться как характеристика степени неоднородности аттрактора в фазовом пространстве.

3.2. Моделирование броуновского движения

Одним из первых систематически изученных хаотических явлений было беспорядочное движение пылевых зерен, открытое ботаником Р. Броуном в 1827 г. Он же установил, что указанное движение не связано с биологическим происхождением микрочастиц. Удовлетворительное объяснение броуновского движения отсутствовало вплоть до 1905 г., когда А. Эйнштейн опубликовал работу со скромным названием «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требующем молекулярно-кинетической теории теплоты» [89]. К основным выводам из предложенного Эйнштейном решения проблемы броуновского движения можно отнести следующие:

- а) движение броуновской частицы вызывается чрезвычайно частыми соударениями с движущимися молекулами окружающей жидкости;
- б) движение самих молекул столь нерегулярно, а число молекул столь велико, что описать взаимодействие взвешенной частицы и окружающей жидкости можно только вероятностным образом в предположении статистической независимости характеристик отдельных ударов.

К аналогичным выводам пришел и М. Смолуховски [163], внесший значительный вклад в экспериментальную проверку и дальнейшее развитие теории броуновского движения.

Следует отметить, что статистические подходы для описания возможных состояний и вероятностей их достижения для молекул газа использовались уже в знаменитых теориях Дж. К. Максвелла и Л. Больцмана. Впервые применение статистического описания временной эволюции динамической системы было сделано в 1902 г. Дж. Рэлеем [150]. Однако, в силу различных причин, эта работа не получила должного продолжения, и именно исследование броуновского

движения, предпринятое А. Эйнштейном, можно считать началом стохастического моделирования физических явлений.

3.2.1. Обыкновенное броуновское движение. В 1923 г. Н. Винер [172] построил первую удовлетворительную с математической точки зрения модель выборочных реализаций броуновского движения и доказал, что эти реализации являются непрерывными «*почти всюду*»¹⁾.

Одной из простейших аппроксимаций броуновского движения служит гауссовское одномерное случайное блуждание. В этом случае точка на прямой с начальным положением $x_0 = 0$ совершает итеративные перемещения $i = 1, 2, \dots$

$$x_i = x_{i-1} + \Delta X,$$

где ΔX — стандартная нормально распределенная случайная величина.

Случайный процесс $X(t)$ называется *гауссовским*, если для каждого конечного набора моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n координаты вектора $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ являются нормально распределенными случайными величинами.

В таком случае гауссовский случайный процесс $X(t)$ будем называть одномерным *броуновским движением* на ограниченном интервале значений независимой переменной $t \in [a, b]$, если он обладает следующими свойствами:

- а) начальное значение функции $X(0) = 0$, а сама функция $X(t)$ — почти всегда непрерывна;
- б) приращение случайной величины при $t_{i+1} > t_i$

$$\Delta X = X(t_{i+1}) - X(t_i) \quad (3.17)$$

имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $M(\Delta X) = 0$ и дисперсией

$$D(\Delta X) = \sigma^2(t_{i+1} - t_i), \quad (3.18)$$

где $\sigma = \text{const} > 0$.

Определенное таким образом движение называют обыкновенным или *классическим броуновским движением*. Типичная реализация обыкновенного броуновского движения показана на рис. 3.4.

¹⁾ Если какое-либо свойство выполняется для каждой точки данного множества, исключая, возможно, лишь множество меры нуль, то говорят, что это свойство выполняется для данного множества «*почти всюду*».

Для приращений обыкновенного броуновского движения ΔX справедливы свойства *стационарности* и *независимости* из которых, в частности, следует, что:

$$M(\Delta X_1 \cdot \Delta X_2 \cdot \dots \cdot \Delta X_n) = M(\Delta X_1) \cdot M(\Delta X_2) \cdot \dots \cdot M(\Delta X_n);$$

$$D(\Delta X) = \sigma^2 |t_{i+1} - t_i| \neq f(X).$$

Как и для любого процесса с независимыми приращениями, для броуновского движения характерно *отсутствие последействия*, т.е. при $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ справедливо равенство

$$P\left(\{X(t_k) \leq x_k\} / \{X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \dots, X(t_1) = x_1\}\right) =$$

$$= P\left(\{X(t_k) \leq x_k\} / \{X(t_{k-1}) = x_{k-1}\}\right).$$

Можно показать, что математическое ожидание модуля приращений при обыкновенном броуновском движении в соответствии с (3.18) определяется равенством

$$M(|\Delta X|) = \sigma \sqrt{\frac{2|t_{i+1} - t_i|}{\pi}}. \quad (3.19)$$

Из равенства (3.19) следует *недифференцируемость* броуновского движения $X(t)$; действительно,

$$|X'(t)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta X}{\Delta t} \right| \propto \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta t|}}{|\Delta t|} = +\infty. \quad (3.20)$$

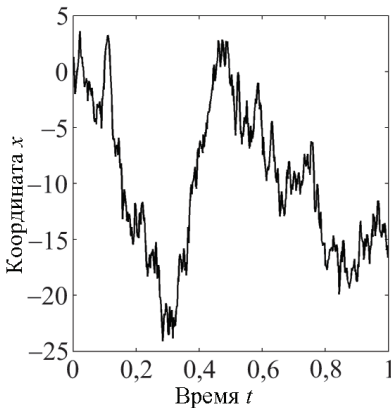


Рис. 3.4. Одномерная реализация обыкновенной броуновской функции

Для оценки *клеточной размерности* реализации обыкновенного броуновского движения допустим, что интервал определения реализации по оси абсцисс равен $[0, 1]$. Разделим этот интервал на n равных частей длиной $\Delta t = 1/n$. Аналогично разделим и ось ординат на n частей длиной ΔX . Тогда отношение $|\Delta X|/|\Delta t| = N_1(\Delta t)$ будет служить оценкой числа квадратов со стороной Δt , необходимых для покрытия части графика реализации $y = X(t)$, расположенной над одним подинтервалом оси абсцисс длиной Δt . В соответствии с (3.19) математическое ожидание случайной величины $|\Delta X|$ будет пропорционально $\sqrt{\Delta t}$, следовательно, его от-

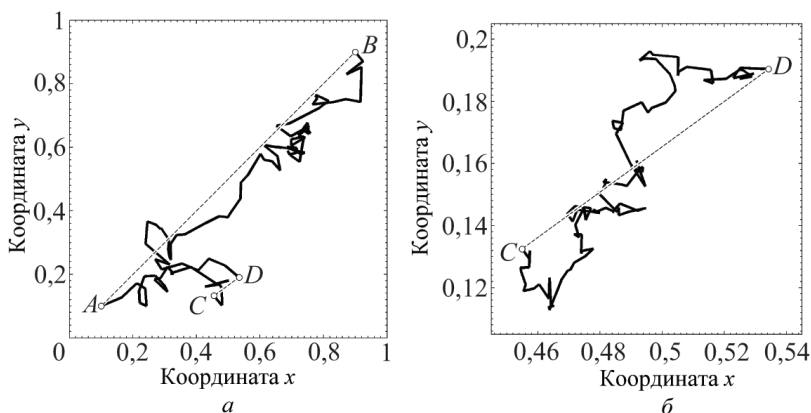


Рис. 3.5. Траектория движения броуновской частицы при различных значениях временного и пространственного масштабов.

ношение $N_1 \Delta t$ также будет пропорционально $\sqrt{\Delta t}$. Так как всего на интервале определения имеется $n = 1/\Delta t$ таких подинтервалов, то общее число квадратов, необходимых для полного покрытия графика данной реализации, оказывается пропорциональным выражению

$$N(\Delta t) \propto \Delta t^{-3/2}. \quad (3.21)$$

Из выражения (3.21) с учетом определения (3.9) найдем клеточную размерность рассматриваемой реализации

$$d_B = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln N(\Delta t)}{\ln \Delta t} = 1,5.$$

Для приращений обыкновенного броуновского движения при любом $r > 0$ выполняется свойство статистического самоподобия

$$X(t + \Delta t) - X(t) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} (X(t + r\Delta t) - X(t)), \quad (3.22)$$

где символ “ \sim ” означает эквивалентность распределений двух случайных величин.

Свойство (3.22) вытекает из равенства вероятностей событий

$$P(X(t + \Delta t) - X(t) \leq x) = P(X(t + r\Delta t) - X(t) \leq \sqrt{r} x),$$

что следует из сравнения интегральных функций распределения двух нормально распределенных случайных величин, приводимых к эквивалентному виду после замены переменной $u = \sqrt{r} s$:

$$F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2\Delta t}\right) du;$$

$$F_2(\sqrt{r}x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r\sigma^2\Delta t}} \int_{-\infty}^{\sqrt{r}x} \exp\left(-\frac{u^2}{2r\sigma^2\Delta t}\right) du,$$

где $u \in (-\infty, x)$ — переменная интегрирования.

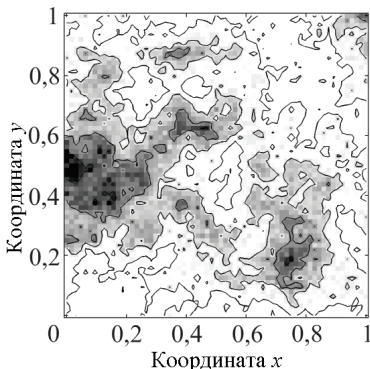


Рис. 3.6. Двумерная реализация обыкновенной броуновской функции

Свойство статистического самоподобия сохраняется и для броуновского движения в пространстве более высокой размерности. На рис. 3.5 показано 100 промежуточных положений при движении броуновской частицы на плоскости от точки A к B и от точки C к D . Статистические характеристики траекторий AB и CD подобны, однако, временной масштаб для них различается в 100 раз, в то время как пространственный — только в 10 раз.

Двумерный вариант броуновского движения определяется по аналогии с одномерным случаем

и сохраняет все основные свойства последнего:

- а) начальное значение функции $X(0, 0) = 0$, а функция $X(x, y)$ — «почти всегда» непрерывна;
- б) приращение случайной величины ΔX имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием $M(\Delta X) = 0$ и дисперсией $D(\Delta X)$, определяемой приращениями независимых переменных

$$D(\Delta X) = \sigma^2 \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

где $\Delta X = X(x + \Delta x, y + \Delta y) - X(x, y)$; $\sigma = \text{const} > 0$

Функция распределения приращений двумерного броуновского движения имеет вид

$$\begin{aligned} F(s) &= P(\Delta X < s) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}} \int_{-\infty}^s \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}\right) du. \end{aligned}$$

Оценка клеточной размерности броуновской поверхности производится аналогично одномерному случаю и дает величину $d_B = 2,5$. Примечательно, что размерность линии уровня для такой поверхности вновь дает величину $d_B = 1,5$. С более подробным анализом

классического броуновского движения можно познакомиться в работах [23, 25, 64].

На рис. 3.20, показаны линии уровня, совмещенные с проекцией на плоскость независимых переменных, для типичной реализации броуновской поверхности. Области, показанные более темным цветом, соответствуют меньшим значениям функции.

3.2.2. Фрактальное броуновское движение. В предыдущем разделе было показано, что обыкновенное броуновское движение обладает всеми свойствами статистически самоаффинных фракталов. Для обыкновенного броуновского движения, как и для любого марковского случайного процесса, характерно отсутствие последствия или «памяти». В 1968 г. в работе Б. Мандельброта и Дж. Ван Несса [136] была описана более общая форма случайного процесса, получившая название «фрактального броуновского движения»¹⁾.

Основным отличием фрактального броуновского движения от классического является наличие параметра H — *показателя Хёрста*. Гауссовский случайный процесс $X(t)$ будем называть *фрактальным броуновским движением* с параметром $H \in [0, 1]$, если он обладает следующими свойствами:

- а) начальное значение $X(0) = 0$, а функция $X(t)$ — почти всегда непрерывна;
- б) приращение случайной величины при $\Delta t > 0$

$$\Delta X = X(t + \Delta t) - X(t) \quad (3.23)$$

имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $M(\Delta X) = 0$ и дисперсией

$$D(\Delta X) = \sigma^2 \Delta t^{2H}, \quad (3.24)$$

где $\sigma = \text{const} > 0$.

Для приращений фрактального броуновского движения выполняется свойство стационарности, но *не выполняется* свойство *независимости*. Действительно, если случайный процесс $X(t)$ имеет независимые приращения, то для случайных величин ΔX_1 и ΔX_2 будет верно равенство

$$D(\Delta X_1 \cdot \Delta X_2) = 0,$$

где $\Delta X_1 = X(t) - X(0)$; $\Delta X_2 = X(t + \Delta t) - X(t)$ при $\Delta t > 0$. В то же время можно показать, что в соответствии с определением (3.24)

$$D(\Delta X_1 \cdot \Delta X_2) = \frac{1}{2} \sigma^2 \left((t + \Delta t)^{2H} - t^{2H} - \Delta t^{2H} \right). \quad (3.25)$$

¹⁾ Заметим, что основные идеи, используемые для анализа фрактального броуновского движения, были изложены в работе А.Н. Колмогорова еще в 1940 г. [129].

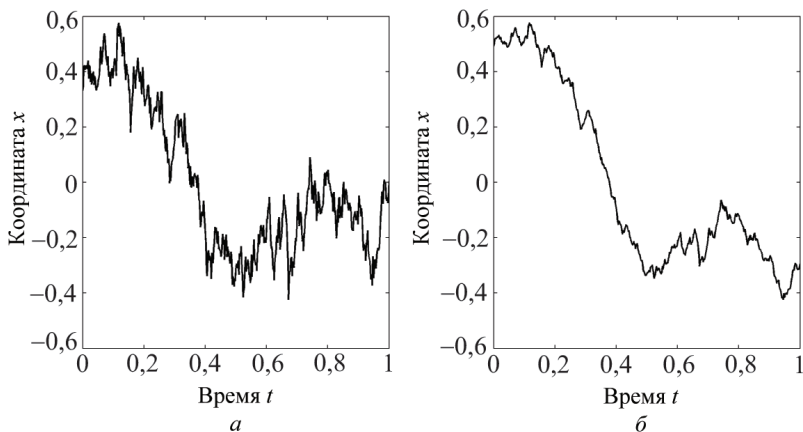


Рис. 3.7. Типичные реализации фрактального броуновского движения при различных значениях параметра Хёрста: а) $H = 1/3$, $d_B = 5/3$; б) $H = 2/3$, $d_B = 4/3$

Поведение полученной функции определяется знаком выражения в скобках, которое отрицательно при $H < 1/2$, равно нулю при $H = 1/2$ и положительно при $H > 1/2$. Следовательно, при показателе Хёрста $H = 1/2$ фрактальное броуновское движение переходит в классическое, а в остальных случаях представляет собой немарковский стационарный случайный процесс.

Из (3.25) вытекает, что если $H > 1/2$, то приращения ΔX_1 и ΔX_2 , скорее всего, будут иметь одинаковые знаки; следовательно, вероятность того, что функция $X(t)$ будет возрастать в будущем, если она возрастала в прошлом, больше вероятности убывания (см. рис. 3.7, б). Указанное свойство Б. Мандельброт назвал *персистентностью* или сохранением тенденции по вероятности.

В другом случае, когда $H < 1/2$, приращения ΔX_1 и ΔX_2 , скорее всего, будут иметь противоположные знаки; следовательно, вероятность того, что функция $X(t)$ будет возрастать в будущем, если она возрастала в прошлом, меньше вероятности ее убывания (см. рис. 3.7, а). По аналогии с предыдущим определением это свойство называется *антиперсистентностью*, т.е. отрицанием тенденции по вероятности.

Математическое ожидание модуля приращений фрактального броуновского движения определяется равенством

$$M(|\Delta X|) = \sigma \sqrt{\frac{2|\Delta t|^{2H}}{\pi}}. \quad (3.26)$$

Очевидно, что как и в классическом случае, из (3.26) следует недифференцируемость фрактального броуновского движения.

Определение размерности реализации фрактального броуновского движения в целом выполняется аналогично классическому случаю. Основное отличие заключается в оценке числа квадратов со стороной Δt , необходимых для покрытия части графика, расположенной над единичным подинтервалом оси абсцисс, которое оказывается пропорциональным выражению

$$N(\Delta t) \propto \Delta t^{H-2}. \quad (3.27)$$

Из выражения (3.27) с учетом определения (3.9) вытекает оценка клеточной размерности рассматриваемой реализации

$$d_B = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln N(\Delta t)}{\ln \Delta t} = 2 - H. \quad (3.28)$$

Примеры реализации одномерного фрактального броуновского движения при различных значениях показателя Хёрста показаны на рис. 3.7.

Аналогично одномерному случаю определяется двумерное фрактальное броуновское движение $X(x_1, x_2)$ с параметром $H \in [0, 1]$, сохраняющее все основные свойства последнего:

- а) начальное значение функции равно нулю: $X(0, 0) = 0$, а функция $X(x_1, x_2)$ — почти всегда непрерывна;
- б) приращение случайной величины ΔX имеет центрированное нормальное распределение: $M(\Delta X) = 0$ с дисперсией $D(\Delta X)$, определяемой приращениями независимых переменных

$$D(\Delta X) = \sigma^2(\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2)^H,$$

где $\Delta X = X(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - X(x_1, x_2)$; $\sigma = \text{const} > 0$

Функция распределения приращений двумерного фрактального броуновского движения имеет вид

$$\begin{aligned} F(s) &= P(\Delta X < s) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2)^{2H}}} \int_{-\infty}^s \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2)^{2H}}\right) du. \end{aligned}$$

Оценка клеточной размерности фрактальной броуновской поверхности дает величину $d_B = 3 - H$. Как показано в работе [64], размерность линии уровня для такой поверхности оказывается равной $d_B = 2 - H$.

Изображение линий уровня, совмещенное с вертикальной проекцией на плоскость независимых переменных для типичных реализаций фрактальной броуновской поверхности, показано на рис. 3.8.

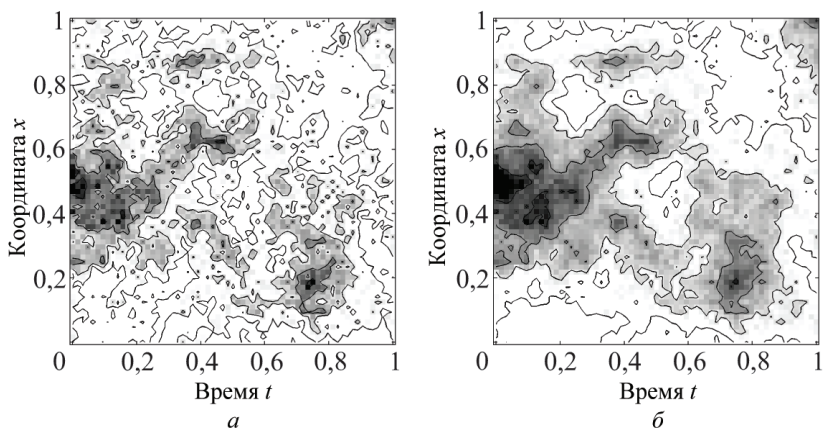


Рис. 3.8. Линии уровня и проекция фрактальной броуновской поверхности на плоскость (x, y) при различных значениях параметра Хёрста: а) $H = 1/3$, $d_B = 8/3$; б) $H = 2/3$, $d_B = 7/3$

3.3. Последовательные случайные сложения

Одной из наиболее эффективных процедур для формирования реализации фрактальной броуновской функции является алгоритм последовательных случайных сложений, впервые предложенный Р. Фоссом в 1985 г. на Берлинской конференции по фундаментальным алгоритмам компьютерной графики [170].

3.3.1. Стандартный алгоритм Фосса. В одномерном варианте алгоритм Фосса представляет собой рекурсивную последовательность сложений значений некоторой псевдослучайной функции x_{i-1} со случайными приращениями Δx_i

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x_i,$$

где Δx_i — значения несмещенной нормально распределенной случайной величины с заданным средним квадратическим отклонением σ_i .

Изменение числа точек определяется величиной некоторого коэффициента разбиения

$$r = \frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i-1}}, \quad (3.29)$$

где Δt_i , Δt_{i-1} — приращения по независимой переменной для двух последовательных поколений фрактальной функции. Тогда число точек определения для i -го поколения фрактальной функции может быть записано в виде

$$N_i = \frac{N_{i-1}}{r}. \quad (3.30)$$

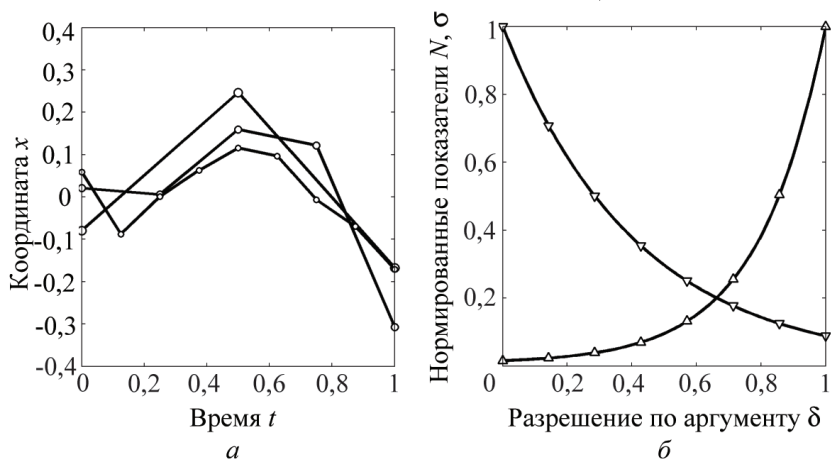


Рис. 3.9. Стандартный алгоритм Фосса при значении параметров распределения $H = 1/2$, $r = 1/2$: а) процедура последовательных случайных сложений; б) нормированные функции распределения показателей $N(\delta)$ и $\sigma(\delta)$

Так как величина N является неубывающей функцией разрешения по аргументу ¹⁾, то начальные значения фрактальной функции в дополнительных точках для каждого последующего i -го поколения определяются методом линейной интерполяции по ее значениям в предыдущем $(i - 1)$ -м поколении.

Дополнительно необходимо потребовать, чтобы среднее квадратическое отклонение приращений по зависимой переменной подчинялось соотношению

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} \cdot r^H, \quad (3.31)$$

где σ_i — среднее квадратическое отклонение приращений по зависимой переменной для i -го поколения фрактальной функции; H — показатель Хёрста.

Пример выполнения последовательности случайных сложений для первых трех поколений фрактальной функции показан на рис. 3.9, а. Точки, принадлежащие одному и тому же поколению условно соединены линиями. Три самые большие точки соответствуют первому поколению, пять меньших точек — второму, а девять самых маленьких — третьему поколению фрактальной функции.

При алгоритмической реализации описанной процедуры для каждого элемента множества значений функции текущего поколения удобно использовать рекурсивное представление в виде нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием, равным ин-

¹⁾ Разрешением функции $X(t)$ по ее аргументу t в i -м поколении будем называть величину δ_i , прямо пропорциональную наименьшему расстоянию между точками Δt_i , для которых ее значения в i -м поколении определены.

терполированному значению функции предыдущего поколения, и средним квадратическим отклонением, определяемым по (3.31).

Из вышеизложенного следует, что значения стохастической фрактальной функции $X(t)$ существенно зависят от распределения величин N и σ на предшествующих уровнях разрешения по ее аргументу δ . Анализ соотношений (3.30)–(3.31) показывает, что стандартный алгоритм Фосса предполагает (см. рис. 3.9, б) монотонное возрастание числа точек определения функции N (обозначено символами $-\Delta-$) и убывание среднего квадратического отклонения ее приращений σ (обозначено символами $-\nabla-$) по мере роста разрешения δ .

Описанный алгоритм допускает вполне тривиальное обобщение на случай двух и более независимых переменных. Примеры одно- и двумерной фрактальной броуновской функции, показанные на рисунках 3.7–3.8, построены с использованием стандартного алгоритма последовательных случайных сложений Фосса. В приложении А.1 приводится листинг программ, выполненных в системе компьютерной математики и технических вычислений MATLAB® (The MathWorks, Inc.).

В научно-исследовательской практике одной из часто возникающих задач является оценка параметров теоретического распределения случайной величины по ограниченному ряду ее наблюдаемых значений. В случае фрактальной броуновской функции основным параметром распределения является показатель Хёрста H .

Для построения его оценки воспользуемся допущением о нормальности распределения дополнительных приращений броуновской функции. Заметим, что с ростом показателя Хёрста H размерность реализации фрактальной функции (3.28) снижается, что обусловлено более быстрым падением амплитуды дополнительных приращений ΔX в соответствии с (3.31). Выполним отображение вектора наблюдаемых значений фрактальной функции (x_i) в виде

$$v_{i+1} = x_i, \quad \omega_{i+1} = x_{i+1}. \quad (3.32)$$

В этом случае, расстояние от полученных точек до прямой $\omega = v$ будет определяться минимальным средним квадратическим отклонением приращений для анализируемой реализации фрактальной функции [59, 60]. Анализ свойств отображения (3.32) показывает, что если исследуемая выборка значений обладает «регулярностью» в какой-либо форме, то полученное множество точек будет располагаться в некоторой окрестности прямой $\omega = v$. Пример выполнения такого отображения для фрактальных кривых при различных значениях показателя Хёрста H показан на рис. 3.10.

Расстояние от произвольной точки (v_i, ω_i) до указанной прямой (показана штриховой линией) вычисляется по формуле

$$d_i = \frac{\omega_i - v_i}{\sqrt{2}}.$$

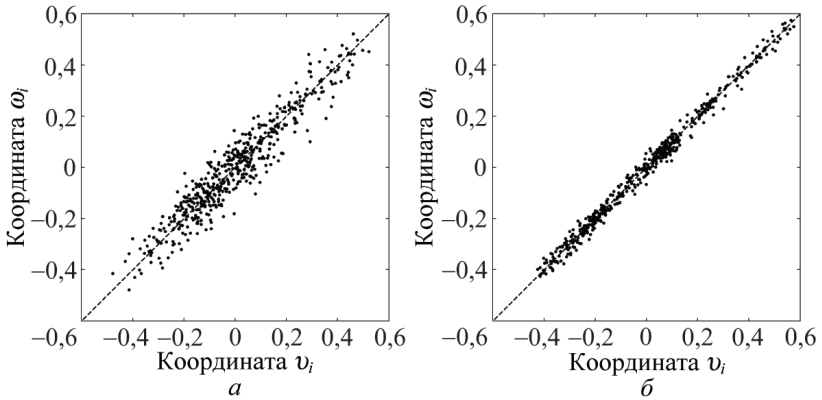


Рис. 3.10. Стандартный алгоритм Фосса. Пример выполнения отображения (3.32) для фрактальных броуновских кривых при значениях параметров распределения: а) $H = 1/3$, $r = 1/2$; б) $H = 2/3$, $r = 1/2$

Гистограммы плотностей относительных частот h_k для эмпирических функций распределения d_i при различных значениях показателя Хёрста H показаны на рис. 3.11:

$$h_k = \frac{n_k}{\sum_{k=1}^s n_k (d_{k+1} - d_k)},$$

где s — число интервалов разбиения анализируемого эмпирического распределения d_i ; n_k — абсолютная частота попадания отдельных значений d_i в интервал $d_k < d_i \leq d_{k+1}$.

Для сравнения на рис. 3.11 показаны кривые плотности вероятности нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, соответствующей квадрату несмещенной оценки среднего квадратического отклонения распределения d_i

$$s_{k-1} = \sqrt{\frac{1}{N_d (k-1)} \sum_{k=1}^s (d_k - \bar{d})^2 n_k}, \quad (3.33)$$

где $N_d = \sum_{k=1}^s n_k$ — объем анализируемой выборки d_i ; \bar{d} — выборочное среднее.

Анализ рекурсивных выражений (3.27)–(3.31) показывает, что величина исправленного выборочного среднего квадратического отклонения (3.33) должна зависеть от показателя Хёрста H и числа точек определения текущей реализации фрактальной функции N_t . Последняя, при заданной области определения функции $t \in [t_0, t_n]$, зависит от

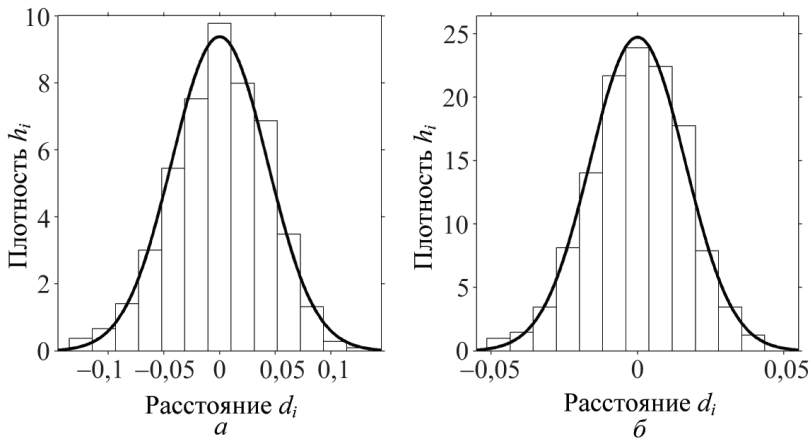


Рис. 3.11. Стандартный алгоритм Фосса. Гистограммы плотностей относительных частот эмпирических функций распределения величины d_i для фрактальных броуновских кривых при значении параметров распределения: а) $H = 1/3$, $r = 1/2$; б) $H = 2/3$, $r = 1/2$

величины коэффициента разбиения r

$$N_t = r^{-N_\delta}, \quad (3.34)$$

где N_δ — число поколений текущей реализации фрактальной функции $X(t)$.

Итоговая зависимость для среднего квадратического отклонения дополнительных приращений в последнем поколении фрактальной функции $X(t)$ может быть представлена в виде

$$\sigma_n = \sigma_0 \cdot N_t^{-H}, \quad (3.35)$$

где σ_0 — среднее квадратическое отклонение дополнительных приращений в первом поколении фрактальной функции $X(t)$.

В таком случае показатель Хёрста из (3.35) выражается как

$$H = \frac{\ln \sigma_0 - \ln \sigma_n}{\ln N_t}. \quad (3.36)$$

На рис. 3.12 показана корреляция между значениями исправленного среднего квадратического отклонения s_{k-1} и показателя Хёрста H для механической бесповторной выборки объемом $N_d = 512$. На том же рисунке штриховой линией показана теоретическая кривая (3.35), где объем выборки используется в качестве оценки числа точек определения фрактальной функции $N_d \rightarrow N_t$, а исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение — для оценки среднего квадратического отклонения ее дополнительных приращений $s_{k-1} \rightarrow \sigma_n$.

Необходимо отметить, что более точную аппроксимацию приведенных данных обеспечивает показанная сплошной линией зависимость

$$s_{k-1} = N_d^{-aH+b}, \quad (3.37)$$

где коэффициенты $a = 0,8963 \rightarrow 1$ и $b = 0,02126 \rightarrow 0$ при неограниченном возрастании объема выборки $N_d \rightarrow \infty$ стремятся к единице и нулю соответственно.

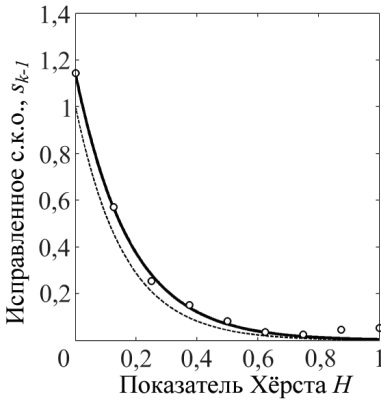


Рис. 3.12. Корреляция между значениями исправленного выборочного среднего квадратического отклонения s_{k-1} и показателя Хёрста H

Таким образом, оценку клеточной размерности d_B реализации одномерной фрактальной функции $X(t)$ по данным выборки ее значений объема N_d при $\sigma_0 = 1$ можно записать как

$$d_B = 2 - \frac{\ln s_{k-1}}{\ln N_d}. \quad (3.38)$$

3.3.2. Обобщенный алгоритм Фосса. В одной из наших работ [57] показано, что для целого ряда практических задач реальный характер распределения показателей σ и N на различных уровнях разрешения δ по независимой переменной может существенно отличаться от приведенного на рис. 3.9, б.

Существенным развитием алгоритма последовательных случайных сложений Фосса стало применение более общего вида функций для описания распределения показателей σ и N [58]. Из прикладной статистики известно, что значительной гибкостью при аппроксимации эмпирических распределений обладают двухпараметрические бета-функции [95]. В таком случае показатели σ и N с учетом свойств интегральной и дифференциальной функций распределения непрерывной случайной величины можно записать в виде

$$N(\delta | \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^\delta \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau; \quad (3.39)$$

$$\sigma(\delta | \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \delta^{\alpha-1} (1-\delta)^{\beta-1} I(\delta), \quad (3.40)$$

где α, β — параметры распределения; $\tau \in [0, \delta]$ — переменная интегрирования; $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция, определяемая интегральным

соотношением

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau;$$

$I(\delta)$ — кусочно-постоянная функция, такая, что

$$I(\delta) = \begin{cases} 1 & \delta < \tau; \\ 0 & \delta \geq \tau. \end{cases}$$

Примеры нормированных по амплитуде дифференциальных и интегральных функций распределения при различных значениях параметров α и β показаны на рис. 3.13. Кривая распределения, соответствующая показателю $N(\delta)$, обозначена символами " Δ ", а для показателя $\sigma(\delta)$ — символами " ∇ ".

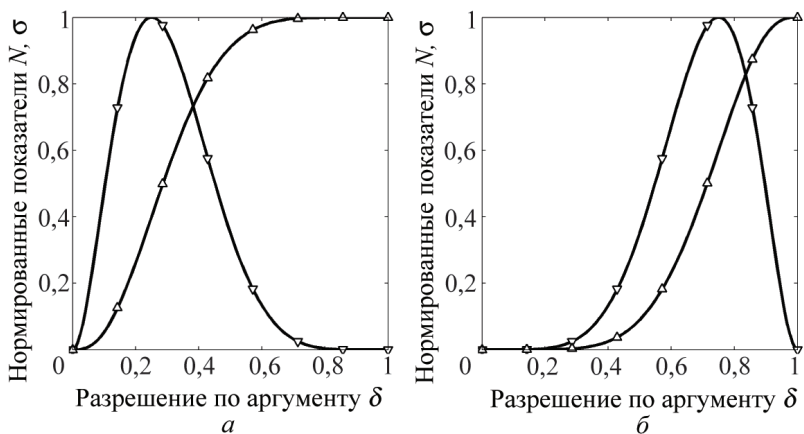


Рис. 3.13. Нормированные функции распределения показателей $N(\delta)$ и $\sigma(\delta)$ для обобщенного алгоритма Фосса при значениях параметров распределения:
 а) $\alpha = 3,0$, $\beta = 7,0$; б) $\alpha = 7,0$, $\beta = 3,0$

Соответствующие реализации одномерных фрактальных функций, построенные с помощью обобщенного алгоритма последовательных случайных сложений, приведены на рис. 3.14. Их сопоставление с реализациями, полученными с помощью стандартного алгоритма Фосса (см. рис. 3.7), показывает, что наличие интервала убывания функции распределения среднего квадратического отклонения $\sigma(\delta)$ в области наибольших значений δ с падением ее до нуля при $\delta \rightarrow 1$ в пределе приводит к получению кусочно-дифференцируемой функции.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим поведение функции распределения среднего квадратического отклонения приращений функции $\sigma(\delta)$ для стандартного алгоритма Фосса при возрастании показателя Хёрста H .

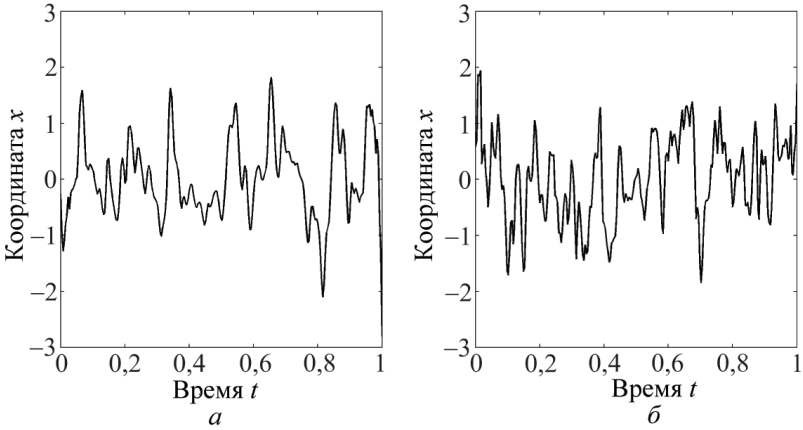


Рис. 3.14. Примеры реализаций одномерных фрактальных функций для обобщенного алгоритма Фосса при значениях параметров распределения: а) $\alpha = 3, 0$, $\beta = 7, 0$; б) $\alpha = 7, 0$, $\beta = 3, 0$

По аналогии с (3.20) с учетом (3.26) производная фрактальной броуновской функции будет пропорциональна пределу

$$|X'(t)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta X}{\Delta t} \right| \propto \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta t|^{2H}}}{|\Delta t|} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta t|^{H-1}. \quad (3.41)$$

Тогда, если $H \in (0; 1)$, то показатель степени приращения аргумента $|\Delta t|$ в (3.41) будет меньше нуля, $H - 1 < 0$, что вызывает расходимость предела при $\Delta t \rightarrow 0$ и недифференцируемость реализаций процесса $X(t)$. Однако, по мере роста величины H показатель степени становится больше нуля, $H - 1 > 0$. В этом случае предел в (3.41) будет равен нулю и любая реализация броуновского процесса $X(t)$ в пределе вырождается до дифференцируемой (линейной) функции. Причиной подобного поведения является асимптотическое стремление к нулю функции $|\Delta t|^{H-1}$ с убывающим основанием $\Delta t \rightarrow 0$, $0 < 1$ при неограниченном возрастании показателя степени, $H \rightarrow \infty$.

Заметим, что дифференциальная функция бета-распределения (3.40) достигает нуля при конечном значении разрешения по независимой переменной:

$$\lim_{\delta \rightarrow 1-0} \sigma(\delta) = 0. \quad (3.42)$$

Таким образом, свойство дифференцируемости для реализаций процесса $X(t)$, полученных с помощью обобщенного алгоритма случайных сложений, зависит от выполнения для функции распределения $\sigma(\delta)$ условия (3.42).

Так же, как и в предыдущем случае обобщенный алгоритм Фосса позволяет легко получать многомерные реализации стохастических фрактальных функций $X(x_1, \dots, x_n)$ для различных функций распределения. Примеры построения реализации двумерной фрактальной функции $X(x_1, x_2)$ при различных значениях параметров функций распределения $N(\delta)$ и $\sigma(\delta)$ показан на рис. 3.15.

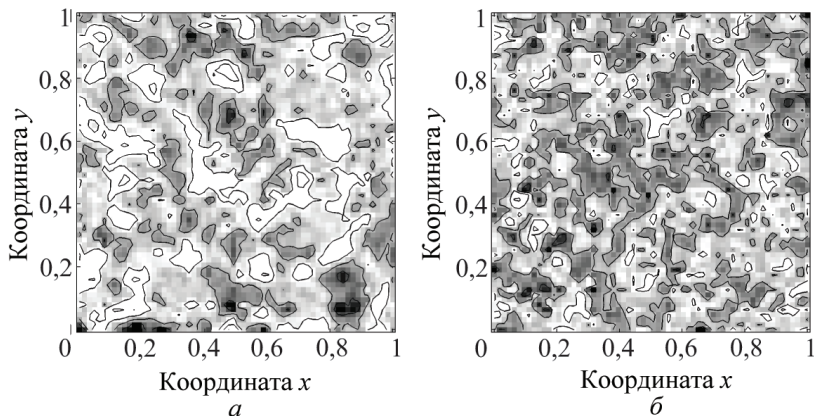


Рис. 3.15. Примеры реализаций двумерных фрактальных функций для обобщенного алгоритма Фосса при значениях параметров распределения: а) $\alpha = 3, 0$, $\beta = 7, 0$; б) $\alpha = 7, 0$, $\beta = 3, 0$

Необходимо отметить, что предложенное обобщение алгоритма случайных сложений никаких особых ограничений на характер распределения показателей N и σ не накладывает. В задачах прикладного моделирования функции $N(\delta)$ и $\sigma(\delta)$ вполне могут быть заданы на основе экспериментальных данных с последующим сглаживанием и интерполяцией [57, 58].

3.4. Моделирование процесса перколяции

Впервые задачи теории перколяции были сформулированы в работах Флори и Стокмайера [101, 165], исследовавших динамику образования гелей при полимеризации высокомолекулярных соединений. Однако формирование современного математического аппарата и собственной терминологии в исследованиях процессов перколяции принято связывать с публикацией в 1957 г. работы С. Бродбента и Дж. Хаммерсли [74], в которой они рассматривают общую задачу о начальной фазе течения некоторой жидкости через случайно-неоднородную проницаемую среду. Рассмотрение поставленной задачи оказалось тесно связано со способом реализации случайного физического процесса. Исторически понятие хаоса связывают с так

называемым тепловым или флуктуационным хаосом, возникающим при рассмотрении идеализированных консервативных термодинамических систем, в которых изначально упорядоченное макроскопическое движение молекул в конечном итоге уступает случайным флуктуациям относительно некоторого положения равновесия. Другой пример случайности, который Хаммерсли назвал процессом протекания или «перколяционным» процессом, отображается с помощью линий распространения жидкости в случайно-неоднородной пористой среде. Здесь хаос зафиксирован как в пространстве, так и во времени, что существенно изменяет общую картину явления.

Броуновская частица при наличии достаточного времени потенциально способна достичь любой точки в рассматриваемой среде. В отличие от термодинамической системы, в перколяционных процессах существует понятие «порога протекания», определяемого как вероятность того, что жидкость, инжектированная в произвольной внутренней точке области, протечет через определенную часть граничных узлов. При вероятности протекания ниже критической процесс распространения жидкости ограничен конечной областью среды [176].

Еще одним примером внутренней хаотичности, присущей пористым средам, является задача об «инвазивной перколяции», впервые описанная Д. Уилкинсоном и Дж. Виллемсеном в 1983 г. [173]. Процесс инвазии, или вторжения, возникает при взаимодействии двух несмешивающихся жидкостей: одной, уже заполняющей пористую среду и другой, подаваемой в эту среду под некоторым давлением. С физической точки зрения именно инвазивная перколяция представляет собой наиболее общий случай перколяционного процесса, встречающегося в природе. Основное влияние на этот процесс оказывает соотношение градиентов давления в потоках инжектируемой и вытесняемой жидкости, обусловленных действием сил инерции, вязкого трения и межфазного взаимодействия обеих жидкостей со стенками капиллярных каналов [103], [159].

Указанные эффекты приводят нас к еще одной особенности развития процессов инвазивной перколяции, а именно к «всплескам», сопровождающим распространение фронта вытеснения вязкой жидкости в проницаемой среде. Наличие таких всплесков с нерегулярной длительностью и амплитудой в режиме квазистатической инъекции было отмечено еще в монографии Ф. Дюллиена [86], однако работа по анализу механизмов их возникновения была начата А.Г. Томпсоном, А.Дж. Катцем и Р.А. Рэшки [168] только в конце 80-х годов XX века. К наиболее значительным результатам, полученным в ходе этих исследований, следует, по-видимому, отнести обнаружение корреляции между распределением спектральной плотности всплесков и локальной проницаемостью пористой среды.

Годом позже Л. Фуруберг и Е. Федер с соавторами [105] опубликовали работу по численному моделированию перколяции, предложив концепцию «инвазивной динамики» и связав ее с характерным мас-

штабом процесса. Результаты этой работы в целом подтвердили предложенную в работе [168] физическую картину распространения инжестируемой жидкости, уточнив связь локальных экстремумов масштабной функции $M(\mu)$ с процессами роста перколяционного и изолированных кластеров.

Для множества связей между двумя произвольными точками пористой среды масштабная функция $M(\mu)$ определяется с помощью взаимной корреляционной функции $C(\delta_r, \delta_t)$ в виде

$$M(\mu) = \delta_r \cdot C(\delta_r, \delta_t), \quad \mu(\delta_r, \delta_t, d_M) = \frac{\delta_r^{d_M}}{\delta_t}, \quad (3.43)$$

где $\mu(\delta_r, \delta_t, d_M)$ — некоторая мера, зависящая от расстояния между точками в пространстве δ_r и во времени δ_t , а также от фрактальной размерности кластера d_M , соответствующего порогу протекания в пористой среде между указанными точками [168].

С.Ру и Е.Гийон продолжили развитие этих идей на случай трех измерений [156], дополнив соотношение (3.43) показателем фрактальной размерности для поверхности перколяционного кластера d_M , определенного на множестве вероятных узлов роста. Их выводы также подтверждают наличие корреляции между линейными мерами δ_r для распределений спектральной плотности всплесков и локального показателя проницаемости узлов перколяционного кластера на заданном временном интервале δ_t .

3.4.1. Основные показатели процесса перколяции. Простейшей моделью, с которой обычно начинается рассмотрение критических показателей перколяционного процесса является регулярный четырехсвязный планарный граф¹⁾ (*решетка*), достижимость произвольного выделенного узла в котором задается некоторой случайной величиной P_{ij} . В том случае, если соответствующие величины в соседних узлах попарно независимы P_{ij} и $P_{(i-1)j}$, $P_{(i+1)j}$, $P_{i(j-1)}$, $P_{i(j+1)}$, то говорят о *некоррелированной перколяции* или перколяции Бернулли.

Одним из первых вопросов, сформулированных в рамках теории некоррелированной перколяции, считается вопрос об оценке вероятности возникновения пути w , связывающего две противоположные стороны ограниченной четырехсвязной решетки, при различных значениях относительной доли достижимых узлов p . Моделирование поставленной задачи методом Монте-Карло показывает (см. рис. 3.16), что вероятность возникновения указанного пути (*вероятность протекания*) зависит не только от доли достижимых узлов, но и от размера решетки L .

¹⁾ Граф называется *планарным*, если его узлы могут быть расположены на плоскости или на сфере таким образом, чтобы связывающие их ребра не пересекались.

Символами " Δ " на рис. 3.16 показана зависимость для решетки размером $L_1 = 25 \times 25$ узлов, а символами " \square " и " ∇ " зависимости для решеток размером $L_2 = 50 \times 50$ и $L_3 = 100 \times 100$ узлов соответственно. Заметим, что интервал оси абсцисс, на котором функция $w(p)$ отлична от нуля и единицы, сужается по мере роста L , стягиваясь к критическому значению при $L \rightarrow \infty$ (показано на рисунке штриховой линией)

$$\lim_{L \rightarrow \infty} p_i = p_\infty = 0,592746 \dots$$

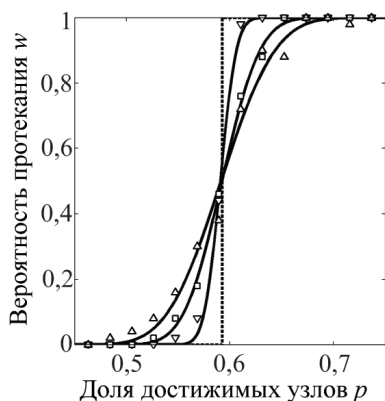


Рис. 3.16. Вероятность возникновения протекания w в зависимости от доли достижимых узлов p и размера решетки L

Заметим, что подмножество связанных узлов в теории протекания принято называть *кластером*, а подмножество узлов, связывающих две противоположные стороны рассматриваемой решетки, — *стягивающим* или *перколяционным* кластером. Из вышесказанного следует, что значение *порога перколяции* p_∞ зависит от числа непосредственных соседей произвольного узла или *связности решетки* $k = 2d_T$, зависящей для планарного графа от топологической размерности пространства d_T . Причем, при доле достижимых узлов ниже *порога перколяции* $p < p_\infty$ на планарной решетке могут формироваться только кластеры ограниченного размера.

Помимо порога перколяции важное значение имеют и другие характеристики перколяционного процесса.

1. Распределение кластеров по размерам и средний размер кластера.
2. Вероятность принадлежности произвольного узла кластеру заданного размера.
3. Размер стягивающего кластера.
4. Вероятность принадлежности произвольного узла стягивающему кластеру.

Благодаря статистическому самоподобию исходного распределения, перколяционный кластер является ярким примером стохастического фрактального множества, в котором, в свою очередь, можно выделить фрактальные подмножества [45].

Остовом перколяционного кластера называется подмножество узлов, соединенных с противоположными сторонами решетки неповторяющимися ребрами. *Эластичный остов* образуется в результате объединения всех кратчайших путей между двумя выделенными узлами.

Таблица 3.1

Размерность структурных элементов перколяционного кластера при различной топологической размерности d_T

Размерность структуры	$d_T = 2$	$d_T = 3$
Размерность кластера	91/48	$2,54 \pm 0,008$
Размерность скелета кластера	$1,678 \pm 0,005$	$1,84 \pm 0,02$
Размерность «красных связей»	3/4	$1,14 \pm 0,01$
Размерность оболочки кластера	7/4	$2,548 \pm 0,014$

Мертвые концы представляют собой подмножества узлов, соединенных с остовом только одной связью.

Красными связями называют единичные ребра, при удалении которых перколяционный кластер распадается на два несвязанных между собой кластера. *Скелет кластера* представляет собой объединение всех кратчайших путей, удаленных от выделенного узла на заданное расстояние.

Полная оболочка кластера представляет собой подмножество узлов, соседствующих с недостижимыми узлами. *Внешняя оболочка кластера* образуется из полной после исключения оболочек всех «внутренних пустот» кластера.

Исследования кластеров, формирующихся в процессах полимеризации высокомолекулярных соединений, привели к необходимости учета размеров «перколирующих» частиц и появлению понятия *неэкранированной внешней оболочки* или достижимого внешнего периметра кластера. Очевидно, что чем крупнее частица, тем больше доля узлов, экранированных от нее своими соседями, следовательно, тем меньше для нее длина достижимого внешнего периметра данного кластера.

Все эти структурные элементы описываются различными фрактальными размерностями (см. табл.3.1), некоторые из которых на сегодняшний день могут быть определены только путем численного моделирования [104].

3.4.2. Построение и анализ структуры перколяционного кластера. Первоначально в теории перколяции был получен целый ряд строгих математических результатов, однако, основной прогресс в этой области достигнут благодаря применению методов статистических испытаний в сочетании с эффективными численными алгоритмами для анализа структуры перколяционного кластера.

Построение перколяционного кластера

Одной из первоначальных задач, возникающих при моделировании перколяционного процесса, является задача выделения подмножества узлов, непрерывным образом связанных с заданным узлом (или с некоторой их совокупностью). Основная сложность здесь заклю-

чается в том, что часть узлов перколяционной решетки может быть недоступной, в зависимости от используемого в данной реализации распределения P_{ij} при заданной относительной доле достижимых узлов p . Отметим, что ответ на сформулированный в предыдущем разделе вопрос об оценке вероятности возникновения пути w , связывающего две противоположные стороны ограниченной четырехсвязной решетки, является частным результатом решения данной задачи.

Среди множества алгоритмов для решения поставленной задачи наибольшей эффективностью по мнению ряда авторов отличается алгоритм, предложенный в различные годы П. Лисом [132], Дж. Хаммерсли [115] и З. Александровицем [69].

Основная идея алгоритма состоит в следующем. Среди свободных достижимых узлов формируется некоторое начальное множество. Для каждого из начальных узлов строится множество соседних (периметр множества) и те из узлов, которые являются достижимыми и не принадлежат к какому-либо другому множеству, присоединяются к начальному. Затем выполняется построение периметра для нового «начального множества» и процесс повторяется до исчерпания свободных узлов или достижения какой-либо заданной точки.

Реализация данного алгоритма для построения перколяционного кластера из произвольной точки квадратной четырехсвязной решетки, выполненная в системе компьютерной математики и технических вычислений MATLAB® (The MathWorks, Inc.), приведена в приложении А.3. В представленной реализации используется идея повторной маркировки узлов перколяционной решетки в процессе формирования кластера, в несколько другом контексте предложенная в 1976 г. Хошеном и Копельманом [122].

1. Все недостижимые узлы перколяционной решетки помечаются цифровой меткой “0” и исключаются из дальнейшего рассмотрения.
2. Все потенциально достижимые узлы помечаются меткой “1”.
3. Все узлы, принадлежащие формируемому кластеру, помечаются меткой “2”.
4. Далее, формируется периметр множества “2” и все “1” из этого периметра помечаются меткой “3”.
5. По завершении проверки все “3” присоединяются к формируемому кластеру, т.е. подвергаются повторной маркировке цифровой меткой “2”.

Примеры построения перколяционных кластеров на четырехсвязной решетке размером 50×50 при различной доле достижимых узлов p показаны на рис. 3.17. Для более наглядного сопоставления исходная последовательность псевдослучайных чисел, определяющая матрицу достижимости узлов данной решетки, была зафиксирована. Черным цветом обозначены достижимые узлы, принадлежащие перколяционному кластеру; светло-серым цветом — достижимые узлы, оставшиеся

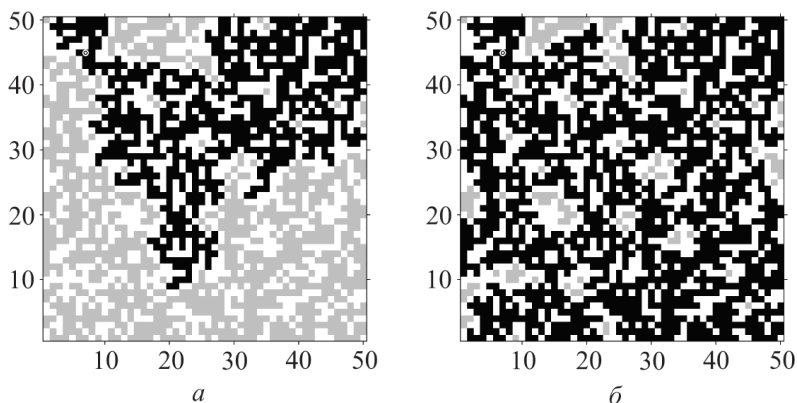


Рис. 3.17. Перколяционные кластеры на четырехсвязной решетке размером 50×50 : а) $p = 0,595$; б) $p = 0,605$

незанятыми, а белым цветом — недостижимые узлы. Символом “ \odot ” отмечена начальная точка перколяционного кластера $M(7; 45)$.

Вообще говоря, использование цифровых меток не является обязательным, но алгоритм, реализованный с их применением, получается менее требовательным к объему оперативной памяти. У ряда авторов встречаются предложения о более радикальном способе экономии памяти, предусматривающем отказ от единовременной генерации и хранения крупного массива псевдослучайных чисел. Идея основана на том факте, что при фиксации начального элемента современные алгоритмы всегда генерируют одну и ту же последовательность псевдослучайных чисел. Исходя из этого, предлагается при проверке очередного элемента массива сохранять лишь его индекс и генерировать всю псевдослучайную последовательность от начала до текущей точки заново.

Заметим, однако, что необходимость в сохранении индексов элементов формируемого кластера все же остается, следовательно, существенный выигрыш этот подход сможет принести лишь при достаточно «разреженной» структуре перколяционного кластера. В более общем случае тот же, а иногда и больший эффект, может дать описанная выше дискретизация используемого числового массива. При непосредственной работе с псевдослучайными числами в типичном случае потребуется размещение в памяти массива действительных чисел размера $n \times n$ с разрядностью не менее 32 бит. В случае дискретизации исходного массива по критерию достижимости каждого узла перколяционной решетки, работа будет происходить с целочисленным массивом того же размера, но с разрядностью, не превышающей 8 бит¹⁾. Помимо этого,

¹⁾ Заметим, что в данном случае сравнение основано на стандартных типах данных, используемых встроенными функциями в системе компьютерной

такой подход позволяет сохранить простоту внутренней структуры алгоритма, чрезвычайно важную в прикладных научных исследованиях.

Проведенный в следующем разделе анализ данного алгоритма показывает, что с различными модификациями он может быть использован не только для построения единичного кластера, но и для анализа различных кластерных подструктур.

Анализ структуры перколяционного кластера

К более сложным проблемам относится задача анализа структуры перколяционного кластера, решением которой в различные годы занимались многие исследователи в области перколяции (см., например, обширные списки публикаций в работах [144, 171]).

Выделение мертвых концов кластера. В 1992 г. П. Грассбергером в работе [110] был описан достаточно эффективный алгоритм выделения мертвых концов перколяционного кластера в двумерном случае, основанный на известном «правиле левой руки»: если двигаться по лабиринту все время касаясь одной стены левой рукой, то рано или поздно можно добраться до выхода. Причем, если какой-либо участок лабиринта является тупиковым, то соответствующие коридоры будут пройдены дважды в противоположных направлениях. Это свойство и позволяет отделить узлы, принадлежащие мертвым концам перколяционного кластера, от узлов, принадлежащих его остову.

Указанный алгоритм действительно эффективен для идентификации мертвых концов перколяционного кластера, но имеет два весьма существенных ограничения:

- а) повторное прохождение какого-либо участка в противоположном направлении позволяет идентифицировать мертвые концы лишь в двумерном случае;
- б) алгоритм является многопроходным и эффективность его работы быстро падает с ростом числа «выходов из лабиринта».

Выделение полного периметра кластера. Задача выделения полного периметра перколяционного кластера не вызывает особой сложности и базируется на его определении (см. выше на стр. 86). В рамках алгоритма повторной маркировки для выполнения этой задачи достаточно на последнем этапе выделить индексы всех “2”, соседствующих с “0”, и полученные элементы пометить цифровой меткой “3”.

математики MATLAB® (The MathWorks, Inc.). При использовании языков программирования общего назначения конкретные показатели могут быть иными, но указанная тенденция сохраняется. Так, для хранения в памяти матрицы достижимости исходной решетки и формируемого перколяционного кластера в приведенной выше реализации алгоритма вполне достаточно одного целочисленного массива разрядностью всего 2 бита.

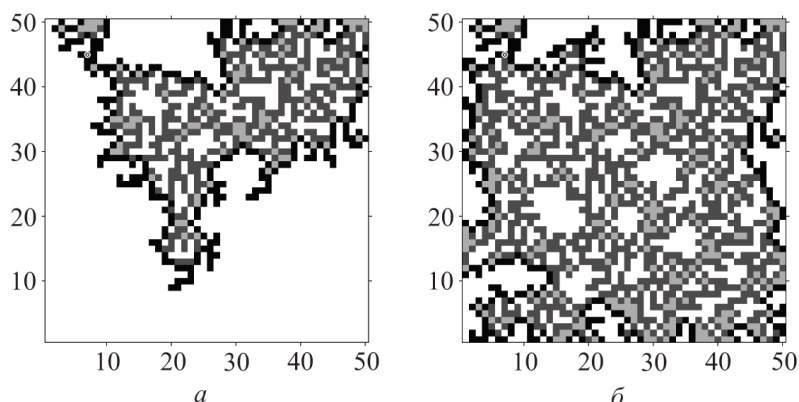


Рис. 3.18. Периметр перколяционного кластера на четырехсвязной решетке размером 50×50 : а) $p = 0,595$; б) $p = 0,605$

Выделение внешнего периметра кластера. Выделение внешнего периметра перколяционного кластера существенно сложнее и базируется на идее разделения узлов, принадлежащих полному периметру кластера. При реализации на симметричной квадратной решетке итерационный алгоритм предусматривает:

- а) построение перколяционного кластера, обозначаемого цифровой меткой “2” из заданного достижимого узла области перколяции;
- б) далее выполняется построение полного периметра полученного кластера узлы которого обозначаются цифровой меткой “3”;
- в) затем обозначаем все узлы, не принадлежащие анализируемому кластеру, цифровой меткой “1”;
- г) начиная с незанятых узлов на внешних границах, выполняется построение кластера, обозначаемого цифровой меткой “0”;
- д) на последнем этапе обозначаем узлы полного периметра, соседствующие с “0”, меткой “4”.

В результате, последовательное объединение узлов, обозначенных цифровыми метками “4”, “3” и “2”, образует, соответственно, внешний, полный периметр и внутренность перколяционного кластера.

Реализация данного алгоритма представлена в приложении А.3. Пример выполнения процедуры выделения полного и внешнего периметра для кластеров, ранее показанных на рис. 3.17, приведен на рис. 3.18. Черным цветом обозначены узлы, принадлежащие внешнему периметру, темно-серым цветом — узлы, принадлежащие полному периметру, а светло-серым цветом — внутренние узлы перколяционного кластера. Не принадлежащие перколяционному кластеру узлы обозначены белым цветом.

Выделение скелета кластера. Для анализа скелета перколяционного кластера предлагается объединение вышеизложенной реализации алгоритма повторной маркировки и некоторых идей метода динамического программирования Р. Беллмана [5]. Применительно к поставленной задаче принцип оптимальности в рекурсивной формулировке Беллмана гласит: *часть кратчайшего пути от любой его точки до начала сама является кратчайшим путем, заканчивающимся в данной точке.*

Использование данного принципа в задаче о построении перколяционного кластера позволяет выделить структуру его скелета, если на каждой итерации сохранить:

- расстояние от каждой достижимой точки текущего периметра кластера до его начала;
- ссылку на предыдущий узел кластера, для которого данная точка периметра является достижимой.

При рассмотрении перколяции Бернулли на симметричной квадратной решетке номер текущей итерации оказывается равен кратчайшему расстоянию от всех точек текущего периметра до начальной точки. В результате, скелет перколяционного кластера легко идентифицируется с помощью «обратной процедуры» метода динамического программирования.

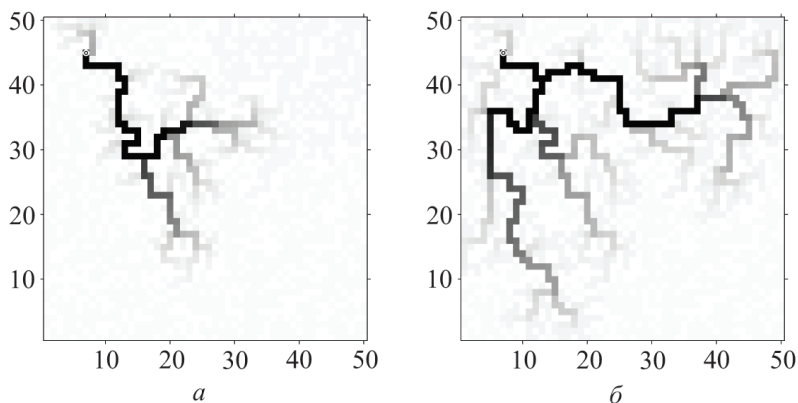


Рис. 3.19. Скелет перколяционного кластера на четырехсвязной решетке размером 50×50 : а) $p = 0,595$; б) $p = 0,605$

Обратная процедура состоит в том, что от каждой точки перколяционного кластера, удаленной от начала на заданное расстояние, восстанавливается кратчайшая траектория. В результате обратной процедуры накапливается информация о частоте использования узлов перколяционного кластера в множестве кратчайших путей заданного радиуса.

Вполне очевидно, что в рамках данного алгоритма обратная процедура легко обобщается на случай выделения скелета перколяционного кластера с радиусом, принадлежащим некоторому диапазону.

Реализация указанного алгоритма приведена в приложении А.3. На рис. 3.19 представлены результаты анализа структуры перколяционных кластеров, ранее показанных на рис. 3.17. Более темный цвет на рис. 3.19 соответствует большей частоте использования данного узла во множестве кратчайших путей. Заметим, что для симметричных кубических решеток описанный алгоритм допускает вполне тривиальное обобщение на случай трех и более пространственных измерений.

3.4.3. Направленная и градиентная перколяция. Одним из существенных упрощений, присутствующих в большинстве перколяционных моделей, является ее «ненаправленный» характер. Применительно к задачам моделирования фильтрации в пористой среде, данное допущение означает рассмотрение процесса фильтрации в квазистационарном приближении. Подобная постановка характерна лишь для некоторых задач «ненапорной» фильтрации с сосредоточенным источником. Один из способов преодоления указанного недостатка был предложен в модели «направленной перколяции» С. Бродбентом и Дж. Хаммерсли [74] в 1957 г. Последующее развитие эта модель получила в работах В. Кинзеля [126, 127], П. Грассбергера [111, 112], Х. Хинричсена [118, 119] и ряда других авторов.

В простейшей постановке модель двумерной направленной перколяции представляет собой разновидность обычной перколяционной модели на решетке с двумя возможными направлениями протекания вместо четырех. На рис. 3.20 на решетке размером 50×50 показана реализация процесса протекания в правом и нижнем направлении при различной доле достижимых узлов p . Видно, что в этом случае перколяционный кластер существенно отличается от показанного на рис. 3.17, что позволяет рекомендовать эту модель в задачах с явно выраженной анизотропией. Поскольку направленную или анизотропную перколяцию можно рассматривать как частный случай изотропного перколяционного процесса, то разработанное программное обеспечение с незначительными модификациями можно использовать для построения и анализа структуры направленного перколяционного кластера.

Однако, нельзя не отметить, что направленная перколяция на двумерной четырехсвязной решетке жестко ограничена выбором одного из четырех возможных направлений. В более реалистичных случаях распространение жидкости в по некоторым направлениям может быть ограничено, но не запрещено. Это приводит нас к интересному обобщению модели некоррелированной перколяции, которое мы назовем «градиентной перколяцией».

Для построения двумерной четырехсвязной градиентной перколяционной решетки необходимо указать четыре компоненты p_r , p_t , p_l , p_b , соответствующие относительной доле достижимых узлов в правом,

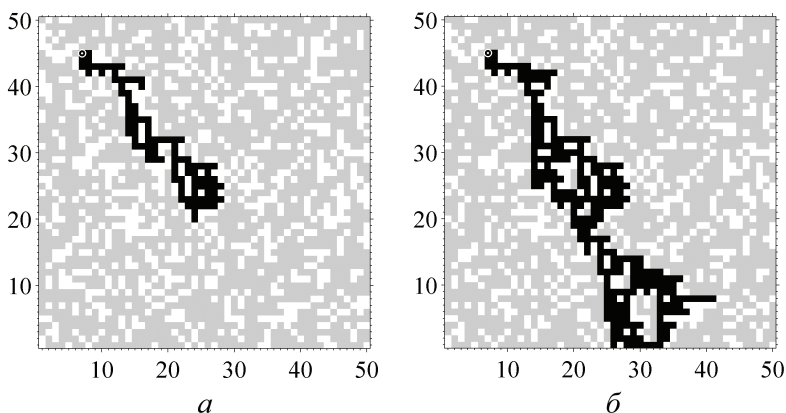


Рис. 3.20. Направленная перколяция на решетке размером 50×50 в правом и нижнем направлениях: а) $p = 0,675$; б) $p = 0,705$

верхнем, левом и нижнем направлениях решетки. Указанные величины можно интерпретировать как координаты двух векторов \vec{p}_{rt} и \vec{p}_{lb} :

$$\begin{aligned}\vec{p}_{rt} &= p_r \cdot \vec{i} + p_t \cdot \vec{j}; \\ \vec{p}_{lb} &= -p_l \cdot \vec{i} - p_b \cdot \vec{j}.\end{aligned}$$

Тогда сумма этих векторов даст вектор *градиента перколяции*

$$\vec{p} = \vec{p}_{rt} + \vec{p}_{lb},$$

который характеризует интенсивность и направление наиболее вероятного роста перколяционного кластера.

Необходимо отметить, что из четырех неповторяющихся компонент p_r , p_t , p_l , p_b , можно составить всего две упорядоченные линейные комбинации: \vec{p}_{rt} и \vec{p}_{lb} или \vec{p}_{lt} и \vec{p}_{rb} . Причем сумма этих комбинаций является величиной, инвариантной к способу комбинирования

$$\vec{p}_{rt} + \vec{p}_{lb} = \vec{p}_{lt} + \vec{p}_{rb} = \vec{p} = \text{idem}.$$

Очевидно, что при таком определении вектора градиента, «ненаправленной» перколяции будут соответствовать равные доли достижимых узлов

$$p_r = p_t = p_l = p_b \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}| = 0.$$

Реализация алгоритма построения градиентного перколяционного кластера приведена в приложении А.3. Основным его отличием от уже изложенной модификации алгоритма повторной маркировки является наличие в матрице четырех взаимно независимых «слоев», каждый из которых соответствует достижимости узлов решетки в выделенном направлении. Для более компактной визуализации подобной структу-

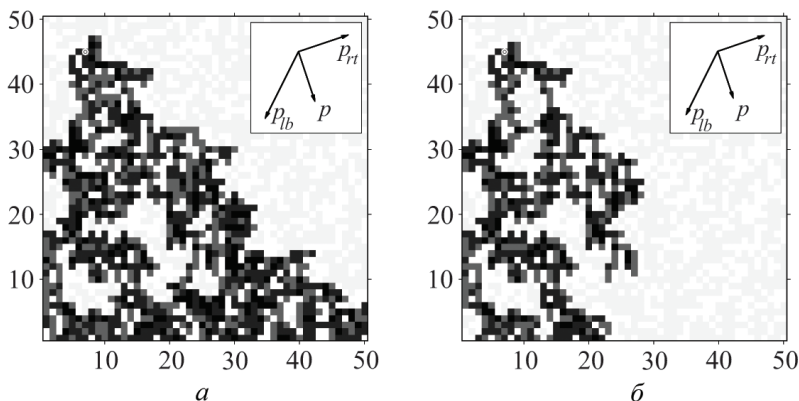


Рис. 3.21. Градиентная перколяция на четырехсвязной решетке размером 50×50 : а) $p_{lb}(-0, 4; -0, 8)$, $p_{rt}(0, 6; 0, 2)$; б) $p_{lb}(-0, 38; -0, 76)$, $p_{rt}(0, 57; 0, 19)$

ры выполняется суммирование цифровых меток на различных слоях матрицы достижимости. Чем больше полученная сумма, тем более светлым цветом изображается данный узел.

Примеры построения перколяционных кластеров для фиксированного исходного распределения вероятности при различном направлении и величине вектора градиента $\vec{p} = \vec{p}_{rt} + \vec{p}_{lb}$ показаны на рис. 3.21, 3.22. На врезках показаны компоненты вектора градиента перколяции. Символом “ \odot ” отмечена начальная точка перколяционного кластера.

Черный цвет соответствует узлам перколяционного кластера, достижимым по всем направлениям. Темно-серый цвет соответствует узлам, достижимым по трем направлениям и т.д. Светло-серым цветом обозначены не принадлежащие перколяционному кластеру узлы, достижимые по какому-либо из направлений, а белым цветом — недостижимые узлы перколяционной решетки.

На приведенных рисунках хорошо заметно, что «пороговый» характер перколяционного процесса, когда незначительные изменения управляющих параметров приводят к значительным изменениям формируемой структуры, сохраняется и в градиентном случае. Так на рис. 3.21 и 3.22 вариация вектора градиента перколяции по абсолютной величине составляет

$$\delta p = \frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{p_1 + p_2} \cdot 100\% = \frac{2 \cdot 0,05}{1,95} \cdot 100\% \approx 5,1\%.$$

Это порождает вариацию «массы» перколяционного кластера, превышающую первоначальную более чем на порядок и различающуюся между собой более чем в три раза:

$$\delta m_{12} = \frac{2 \cdot (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \cdot 100\% = \frac{2 \cdot 375}{1413} \cdot 100\% \approx 53,1\%;$$

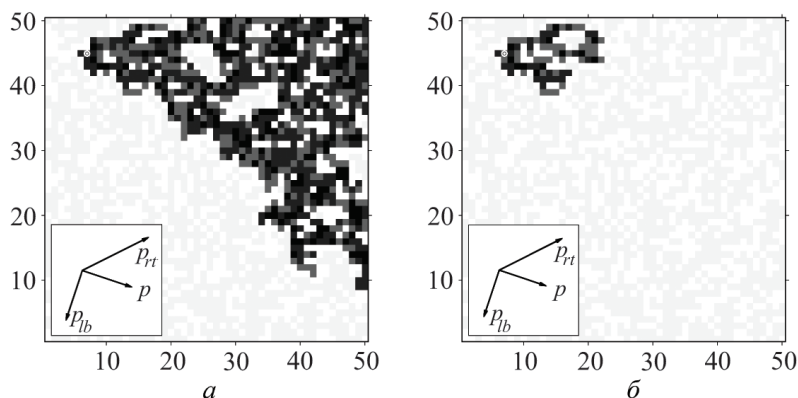


Рис. 3.22. Градиентная перколяция на четырехсвязной решетке размером 50×50 : а) $p_{lb}(-0, 2; -0, 6)$, $p_{rt}(0, 8; 0, 4)$; б) $p_{lb}(-0, 19; -0, 57)$, $p_{rt}(0, 76; 0, 38)$

$$\delta m_{34} = \frac{2 \cdot (m_3 - m_4)}{m_3 + m_4} \cdot 100\% = \frac{2 \cdot 661}{819} \cdot 100\% \approx 161,4\%.$$

Кроме того, сопоставление градиентных перколяционных кластеров на рис. 3.21 и 3.22 показывает сильную зависимость формируемой структуры от направления заданного вектора. Так на рис. 3.21 достижимыми из начального узла $M(7; 45)$ являются узлы, в основном лежащие на левой и нижней границах области. В то же время, наименьшим расстоянием до начального обладают узлы, лежащие на верхней границе. Поворот вектора градиента на 53° , показанный на рис. 3.22, приводит к тому, что достижимыми для того же начального узла становятся узлы, лежащие на верхней и правой границе области.

Следует отметить, что изложенные в предыдущем разделе алгоритмы анализа структуры перколяционного кластера вполне применимы и для градиентного случая, однако, потребуют некоторой модификации.

Заключение

В заключение отметим некоторые, наиболее интересные на наш взгляд, особенности моделирования пористых структур в прикладных исследованиях.

1. Применение методики осреднения и гипотезы сплошности позволяет использовать при моделировании пористых структур привычный и хорошо изученный аппарат дифференциальных уравнений. В то же время, попытки учета нелинейных характеристик пористой среды приводят при построении аналитического решения к весьма громоздким выкладкам, что снижает общую эффективность от использования традиционного математического аппарата.
2. Использование моделей на основе регулярных систем капилляров и частиц позволяет получить качественное описание пористой среды в некоторых простых случаях, но попытки описания хаотичности в распределении некоторых характеристик приводят к резкому усложнению граничных условий, сопоставимых по сложности с задачей «оцифровки» реального пористого тела.
3. В то же время, развитие указанных моделей постепенно привело к смещению акцента исследователей с моделирования внутренней структуры пористой среды к моделированию распределения ее характеристик в заданной области. Это привело в обогащении прикладного моделирования пористых структур математическим аппаратом, развитым в теории случайных процессов и фрактальной геометрии.
4. Теория некоррелированной перколяции, несмотря на значительные успехи, недостаточно полно, на взгляд авторов, отражает особенности процесса распространения жидкостей в пористой среде. К основным недостаткам, прежде всего относится допущение об отсутствии корреляции в исходном распределении случайной величины. В связи с этим, весьма перспективным направлением представляется применение обобщенного алгоритма случайных сложений, позволяющего моделировать пористую среду на основе экспериментальных данных.

Приложение А

ЛИСТИНГИ ПРОГРАММ

А.1. Стандартный алгоритм Фосса

Одномерная фрактальная функция

```
function z = fVoss1d(ng, sigma, H, r, ndat)

% =====
% Одномерная фрактальная функция
% Стандартный алгоритм случайных сложений Фосса
% =====
%      sigma - начальное значение с.к.о.
%      ng     - число поколений фрактальной функции
%      H      - показатель Хёрста
%      r      - коэффициент разбиения
%      ndat   - номер для инициализации п.с.п.
% =====

randn('state', ndat);
n = 2; t = linspace(0, 1, n);
z = normrnd(0, sigma, 1, n);
z = z - mean(z);

for j = 1: ng,
    n = round(1 + (n-1)/r);
    ti = linspace(0, 1, n);
    zi = interp1(t, z, ti, 'linear');
    sigma = sigma * r^H;
    z = normrnd(zi, sigma, 1, n);
    z = z - mean(z);
    t = ti;
end
```

Двумерная фрактальная функция

```
function z = fVoss2d(ng, sigma, H, r, ndat)

% =====
% Двумерная фрактальная функция
% Стандартный алгоритм случайных сложений Фосса
% =====
%     sigma - начальное значение с.к.о.
%     ng     - число поколений фрактальной функции
%     H      - показатель Хёрста
%     r      - коэффициент разбиения
%     ndat   - номер для инициализации п.с.п.
% =====
randn('state', ndat);
[x,y] = meshgrid(0:1,0:1); n = 2;
z = normrnd(0, sigma, n, n);
z = z - mean(mean(z));

for j = 1: ng,
    n = round(1 + (n-1)/r);
    ti = linspace(0,1,n);
    [xi,yi] = meshgrid(ti,ti);
    zi = interp2(x,y,z,xi,yi,'linear');
    sigma = sigma * r^H;
    z = zi + normrnd(0, sigma, n, n);
    z = z - mean(mean(z));
    [x,y] = meshgrid(ti,ti);
end
```

А.2. Обобщенный алгоритм Фосса**Одномерная фрактальная функция**

```
function z = fVoss1g(ng, n, sigma, a, b, ndat)
% =====
% Одномерная фрактальная функция
% Обобщенный алгоритм случайных сложений Фосса
% =====
%     sigma - максимальное значение с.к.о.
%     ng     - число поколений фрактальной функции
%     n      - конечное число точек определения
%     a,b    - параметры бета-функции
%     ndat   - номер для инициализации п.с.п.
% =====
```

```

randn('state',ndat);
t = linspace(0,1,ng);
n = round(2 + (n - 2).*betacdf(t,a,b));
t = betapdf(t,a,b); sigma = sigma.*t./max(t);
t = linspace(0,1,n(1));
z = zeros(1,n(1));

for j = 2: ng,
    ti = linspace(0,1,n(j));
    z = interp1(t,z,ti,'linear');
    z = normrnd(z,sigma(j),1,n(j));
    z = z - mean(z);
    t = ti;
end

```

Двумерная фрактальная функция

```
function z = fVoss2g(ng, n,sigma, a,b, ndat)
```

```

% =====
% Двумерная фрактальная функция
% Обобщенный алгоритм случайных сложений Фосса
% =====
%     sigma - максимальное значение с.к.о.
%     ng     - число поколений фрактальной функции
%     n      - конечное число точек определения
%     a,b    - параметры бета-функции
%     ndat   - номер для инициализации п.с.п.
% =====

```

```

randn('state',ndat);
t = linspace(0,1,ng);
n = round(2 + (n - 2).*betacdf(t,a,b));
t = betapdf(t,a,b);
sigma = sigma.*t./max(t);
t = linspace(0,1,n(1));
[x,y] = meshgrid(t,t);
z = normrnd(0,sigma(1),n(1),n(1));
z = z - mean(mean(z));

```

```

for j = 2: ng,
    t = linspace(0,1,n(j));
    [xi,yi] = meshgrid(t,t);
    z = interp2(x,y,z,xi,yi,'linear');
    z = normrnd(z,sigma(j),n(j),n(j));

```

```

z = z - mean(mean(z));
x = xi; y = yi;
end

```

А.3. Моделирование процесса перколяции

Построение перколяционного кластера

```

function d = cluster(n,c, ndat)

% =====
% Построение перколяционного кластера для
% произвольной точки квадратной четырехсвязной
% решетки:
% =====
%   n - размер решетки (n*n);
%   c - пороговое значение вероятности протекания;
%   p - распределение вероятности по решетке;
%   d - распределение достижимых узлов по решетке;
%   ndat - номер для инициализации п.с.п.
% =====

rand('state',ndat); p = rand(n);
d = zeros(size(p),'uint8'); d(p < c) = 1; clear p;

% =====
% Визуализируем текущее состояние области
% перколяции:
% =====
%   map - цветовая карта для визуализации
%         изображения;
%   clr - коэффициент масштабирования.
% =====

map = 'hot'; clr = round(length(colormap(map))/3);
visualize(d, clr, map, 1/3); [i1,j1] = find(d == 1);

l1 = length(i1);
i2 = uint16(i1(floor(1 + (l1-1)*rand)));
j2 = uint16(j1(floor(1 + (l1-1)*rand))); clear i1 j1
l1; d(i2,j2) = 2;

visualize(d, clr, map, 2/3);

```

```

% =====
% Повторяем цикл до тех пор, пока добавляются новые
% узлы перколяционного кластера.
% =====

while length(i2) > 0,
    d = numark(i2,j2, d, 1,3, 'ext');
    [i2,j2] = find(d == 3);
    i2 = uint16(i2); j2 = uint16(j2);
    visualize(d, clr, map, 1/30);
    d = renumark(i2,j2, d, 2);
    visualize(d, clr, map, 1/30);
end visualize(d, clr, map, 0);

```

Выделение полного и внешнего периметра перколяционного кластера

```

function hull(n,c, ndat)

% =====
% Построение полного и внешнего периметра
% перколяционного кластера из произвольной точки
% квадратной четырехсвязной решетки:
% =====
%     n - размер решетки (n*n);
%     c - пороговое значение вероятности протекания;
%     d - распределение достижимых узлов по решетке;
%     ndat - номер для инициализации п.с.п.
% =====

d = cluster(n,c, ndat);

% =====
% Строим полный периметр перколяционного кластера.
% =====
% Выделяем индексы всех "2", которые соседствуют
% с "0", и обозначаем их как "3".
% =====

[i2,j2] = find(d == 2); i2 = uint16(i2);

j2 = uint16(j2);
d = numark(i2,j2, d, 0,3, 'int');
visualize(h,d, clr,map, 1);

```

```

% =====
% Объединяем все узлы, не принадлежащие кластеру.
% =====
% Все "0" обозначаем как "1" и визуализируем.
% =====

d(d == 0) = 1; visualize(h,d, clr,map, 1);

% =====
% Выделяем индексы всех "1" на границах области и
% помечаем их как "4".
% Среди соседей каждой "4" выделяем "1" и маркируем
% их как "5".
% Выделяем индексы всех "5" и перемаркируем
% их как "4".
% =====

for ab = 1: 4,
    switch ab,
        case 1,
            i4 = find(d(:,1) == 1);
            j4 = zeros(size(i4')) + 1;
            d(i4,1) = 4;
        case 2,
            j4 = find(d(1,:) == 1);
            i4 = zeros(size(j4')) + 1;
            d(1,j4) = 4;
        case 3,
            i4 = find(d(:,n) == 1);
            j4 = zeros(size(i4')) + n;
            d(i4,n) = 4;
        case 4,
            j4 = find(d(n,:) == 1);
            i4 = zeros(size(j4')) + n;
            d(n,j4) = 4;
    end

    while length(i4) > 0,
        d = numark(i4,j4, d, 1,5, 'ext');
        [i4,j4] = find(d == 5);
        i4 = uint16(i4); j4 = uint16(j4);
        d = renumark(i4,j4, d, 4);
    end
end

% =====

```

```

% Выделяем индексы всех "4" и перемаркируем
% их как "0".
% =====
[i4,j4] = find(d == 4);
i4 = uint16(i4);
j4 = uint16(j4);
d = renumark(i4,j4, d, 0);

% =====
% Строим внешний периметр перколяционного кластера.
% =====
% Выделяем индексы всех "3", которые соседствуют
% с "0", и обозначаем их как "4".
% =====

[i3,j3] = find(d == 3);
i3 = uint16(i3);
j3 = uint16(j3);
d = numark(i3,j3, d, 0,4, 'int');

% =====
% Выделяем индексы всех "1" и перемаркируем их
% как "0".
% =====

[[i1,j1] = find(d == 1);
i1 = uint16(i1);
j1 = uint16(j1);
d = renumark(i1,j1, d, 0);

% =====
% Визуализируем полученный результат.
% =====

visualize(h,4-d, clr,map, 0);

```

Выделение скелета перколяционного кластера

```
function skeleton(n,c, ndat)
```

```

% =====
% Построение перколяционного кластера для
% произвольной точки квадратной четырехсвязной
% решетки и выделение его скелета радиусом,

```

```

% не превышающим заданного числа:
% =====
%     n - размер решетки (n*n);
%     c - пороговое значение вероятности протекания;
%     p - распределение вероятности по решетке;
%     d - распределение достижимых узлов по решетке;
%     ndat - номер для инициализации п.с.п.
% =====

rand('state',ndat);
p = rand(n);
d = zeros(size(p),'int16');
d(p < c) = 1; d0 = d; clear p;

% =====
% Инициализируем массивы расстояний и индексов
% и визуализируем текущее состояние:
% =====
%     ls - кратчайшее расстояние до начального узла;
%     is, js - индексы предшествующего по скелету узла;
%     map - цветовая карта для визуализации
%           изображения;
%     clr - коэффициент масштабирования.
% =====

is = zeros(size(d),'int16');
js = is; ls = is; map = hot(256);
clr = round(length(map)/3);
visualize(d, clr, map, 1/3);

% =====
% Выделяем индекс одной из "1" в области и
% маркируем ее как "2", после чего визуализируем
% текущее состояние.
% =====

[i1,j1] = find(d == 1);
l1 = length(i1);
i2 = uint16(i1(floor(1 + (l1-1)*rand))); i0 = i2;
j2 = uint16(j1(floor(1 + (l1-1)*rand))); j0 = j2;
d(i2,j2) = 2; is(i2,j2) = i2; js(i2,j2) = j2;
clear i1 j1 l1; visualize(d, clr, map, 2/3);

% =====
% Повторяем цикл до тех пор, пока добавляются новые

```



```

% узлы перколяционного кластера.
% =====

while length(i2) > 0,

    % =====
    % Выделяем "1" среди соседей каждой "2" и
    % маркируем их как "3". Сохраняем индексы
    % предшествующего узла в is, js, а расстояние до
    % начального - в ls.
    % =====

    for ij = 1: length(i2),
        i2o = i2(ij); j2o = j2(ij);

        i2l = i2o; j2l = j2o - 1;
        if j2l >= 1 & d(i2l, j2l) == 1,
            is(i2l, j2l) = i2o; js(i2l, j2l) = j2o;
            ls(i2l, j2l) = ls(i2o, j2o) + 1;
            d(i2l, j2l) = 3;
        end

        i2r = i2o; j2r = j2o + 1;
        if j2r <= n & d(i2r, j2r) == 1,
            is(i2r, j2r) = i2o; js(i2r, j2r) = j2o;
            ls(i2r, j2r) = ls(i2o, j2o) + 1;
            d(i2r, j2r) = 3;
        end

        i2t = i2o - 1; j2t = j2o;
        if i2t >= 1 & d(i2t, j2t) == 1,
            is(i2t, j2t) = i2o; js(i2t, j2t) = j2o;
            ls(i2t, j2t) = ls(i2o, j2o) + 1;
            d(i2t, j2t) = 3;
        end

        i2b = i2o + 1; j2b = j2o;
        if i2b <= n & d(i2b, j2b) == 1,
            is(i2b, j2b) = i2o; js(i2b, j2b) = j2o;
            ls(i2b, j2b) = ls(i2o, j2o) + 1;
            d(i2b, j2b) = 3;
        end
    end
end

% =====
% Выделяем индексы всех "3" и перемаркируем их

```

```

% как "2", после чего визуализируем текущее
% состояние.
% =====

[i2,j2] = find(d == 3);
i2 = uint16(i2); j2 = uint16(j2);
visualize(d, clr,map, 1/30);
d = renumark(i2,j2, d, 2);
visualize(d, clr,map, 1/30);

end

visualize(d, clr,map, 1);

% =====
% Выделяем скелет кластера радиусом, не превышающим
% 2/3 от максимального радиуса кластера по решетке.
% =====

for ks = 1: round(max(max(ls))*2/3),
    [ik,jk] = find(ls == ks);
    ik = uint16(ik); jk = uint16(jk);

    % =====
    % Находим все узлы, удаленные на заданное
    % расстояние, и по списку индексов возвращаемся
    % в начало кластера. Частоту прохождения
    % сохраняем в d.
    % =====

    for ji = 1: length(ik),
        d(ik(ji),jk(ji)) = d(ik(ji),jk(ji)) + 1;
        ii = is(ik(ji),jk(ji));
        jj = js(ik(ji),jk(ji));

        for ij = 1: ks,
            d(ii,jj) = d(ii,jj) + 1;
            it = is(ii,jj);
            jt = js(ii,jj);
            ii = it; jj = jt;
        end
    end
end

end

% =====
% Нормируем распределение абсолютных частот d по
% амплитуде и визуализируем полученную картину.

```

```
% =====
if max(max(d)) > 255,
    d = uint8(round(d0 + d.*(255/double(max(max(d))))));
end
map = 1 - gray(256); colormap(map); brighten(-0.95);
clr = round(length(map)/max(max(d)));
visualize(d, clr, map, 0);
```

Построение перколяционного кластера при наличии градиента

```
function cluster_grad(n,c, ndat)
```

```
% =====
% Построение перколяционного кластера для
% произвольной точки квадратной четырехсвязной
% решетки при наличии градиента:
% =====
%     n - размер решетки (n*n);
%     c - пороговые значения вероятности протекания:
%         c(1) - влево, c(2) - вверх,
%         c(3) - вправо, c(4) - вниз;
%     p - распределение вероятности по решетке;
%     d - распределение достижимых узлов по решетке.
% =====

rand('state',ndat); p = rand(n);
d = zeros(size(p),'uint8');
d1 = d; d1(p < c(1)) = 1;
d2 = d; d2(p < c(2)) = 1;
d3 = d; d3(p < c(3)) = 1;
d4 = d; d4(p < c(4)) = 1;
clear p;

% =====
% Визуализируем текущее состояние области
% перколяции:
% =====
%     map - цветовая карта для визуализации
%     изображения;
%     clr - коэффициент масштабирования.
% =====
% Если узел протекает по 4-м направлениям - цвет
% "высокий", если по 3-м -- цвет "ниже" и т.д.
% =====
```

```

h = figure;
map = 'gray'; clr = round(length(colormap(map))/7);
initFig(h); visualize(h, (d1+d2+d3+d4)/3, clr, map,
1/2);
% =====
% Выделяем индекс одной из полных "1"
% (d1*d2*d3*d4 = 1) в области и маркируем ее
% как "+2", после чего визуализируем текущее
% состояние области.
% =====

[i1,j1] = find((d1+d2+d3+d4) == 4);
i1 = uint16(i1(i1 > n/4 & i1 < 3/4*n));
j1 = uint16(j1(j1 > n/4 & j1 < 3/4*n));
l1 = length(i1);
i0 = i1(floor(1 + (l1-1)*rand));
j0 = j1(floor(1 + (l1-1)*rand));
i2 = i0; j2 = j0; d(i2,j2) = 2;
visualize(h, 2*d+(d1+d2+d3+d4)/3, clr, map, 1/2);

% =====
% Повторяем цикл до тех пор, пока добавляются новые
% узлы перколяционного кластера.
% =====

while length(i2) > 0,

    % =====
    % Выделяем частичные "1" среди соседей
    % каждой "+2" и маркируем их как "+3".
    % =====

    for ij = 1: length(i2),
        i2l = i2(ij); j2l = j2(ij) - 1;
        if j2l >= 1 & d1(i2l,j2l) == 1,
            d(i2l,j2l) = 3;
            d1(i2l,j2l) = 3;
        end

        i2t = i2(ij) - 1; j2t = j2(ij);
        if i2t >= 1 & d2(i2t,j2t) == 1,
            d(i2t,j2t) = 3;
            d2(i2t,j2t) = 3;
        end
    end
end

```

```

i2r = i2(ij); j2r = j2(ij) + 1;
if j2r <= n & d3(i2r,j2r) == 1,
    d(i2r,j2r) = 3;
    d3(i2r,j2r) = 3;
end

i2b = i2(ij) + 1; j2b = j2(ij);
if i2b <= n & d4(i2b,j2b) == 1,
    d(i2b,j2b) = 3;
    d4(i2b,j2b) = 3;
end
end

% =====
% Выделяем индексы всех "+3" и перемаркируем
% их как "+2", после чего визуализируем
% текущее состояние.
% =====

[i2,j2] = find(d == 3);
i2 = uint16(i2); j2 = uint16(j2);
visualize(h, 2*d+(d1+d2+d3+d4)/4,clr,map,1/100);
d = renumark(i2,j2, d, 2);
visualize(h, 2*d+(d1+d2+d3+d4)/4,clr,map,1/100);
end

visualize(h, 2*d+(d1+d2+d3+d4)/4, clr, map, 0);

```

Некоторые вспомогательные функции

```

function dm = numark(im,jm, dm, fmark,smark,emark)

% =====
% Вспомогательная функция маркировки узлов.
% =====
% im,jm - индексы узлов, подлежащих проверке;
% dm     - основной массив цифровых меток;
% fmark  - проверяемая цифровая метка;
% smark  - устанавливаемая цифровая метка;
% emark : int - ставим метку в проверяемый узел;
%         ext - ставим метку в соседний узел.
% =====

n = length(dm);

```

```

for ij = 1: length(im),
    imx = im(ij); jmx = jm(ij) - 1;
    if jmx >= 1 & dm(imx,jmx) == fmark,
        switch emark,
            case 'ext', dm(imx,jmx) = smark;
            case 'int', dm(im(ij),jm(ij)) = smark;
        end
    end
    imx = im(ij); jmx = jm(ij) + 1;
    if jmx <= n & dm(imx,jmx) == fmark,
        switch emark,
            case 'ext', dm(imx,jmx) = smark;
            case 'int', dm(im(ij),jm(ij)) = smark;
        end
    end
    imx = im(ij) - 1; jmx = jm(ij);
    if imx >= 1 & dm(imx,jmx) == fmark,
        switch emark,
            case 'ext', dm(imx,jmx) = smark;
            case 'int', dm(im(ij),jm(ij)) = smark;
        end
    end
    imx = im(ij) + 1; jmx = jm(ij);
    if imx <= n & dm(imx,jmx) == fmark,
        switch emark,
            case 'ext', dm(imx,jmx) = smark;
            case 'int', dm(im(ij),jm(ij)) = smark;
        end
    end
end
end

```

```
function dm = renumark(im,jm, dm, smark)
```

```

% =====
% Вспомогательная функция повторной маркировки
% узлов.
% =====
%   im, jm - индексы узлов, подлежащих проверке;
%   dm      - основной массив цифровых меток;
%   smark    - устанавливаемая цифровая метка.
% =====

```

```

for ij = 1: length(im),
    dm(im(ij),jm(ij)) = smark;
end

```

```

function visualize(df, clrf, mapf, tauf)

```

```

% =====
% Вспомогательная функция визуализации текущего
% состояния области перколяции.
% =====
%   df   - основной массив цифровых меток;
%   clrf - коэффициент масштабирования;
%   mapf - цветовая карта для визуализации;
%   tauf - временная задержка после визуализации.
% =====

```

```

    image(df*clrf);
    set(gca,'tickdir','out');
    set(gca,'fontName','GOST type B','fontSize',10);
    colormap(mapf); axis square;
    pause(tauf);

```

```

function initFig(ifh)

```

```

% =====
% Вспомогательная функция инициализации окна вывода.
% =====
%   ifh - указатель на текущее графическое окно;
%   x,dx - горизонтальный размер и поля окна вывода;
%   y,dy - вертикальный размер и поля окна вывода.
% =====

```

```

x = 10.00; dx = 0.0; y = 10.00; dy = 0.0;

```

```

figure(ifh); set(gcf, ...
    'PaperUnits', 'centimeters', ...
    'PaperOrientation', 'portrait', ...
    'PaperPosition', [dx dy x-dx y-dy], ...
    'PaperPositionMode', 'manual', ...
    'PaperSize', [x y]);
clf;

```

Список литературы

1. Андреевский Р.А., Федорченко И.М. Изменение открытой и закрытой пористости при спекании пористых тел // Украин. хим. журн, 1960, Т. 26, вып. 5, с. 616–620.
2. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. — М.: Гостехиздат, 1953. — 451 с.
3. Арнольд В.И. Математические методы в классической механике. — М.: Наука, 1974. — 472 с.
4. Баренблатт Г.И. и др. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. — М.: Недра, 1984. — 303 с.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 400 с.
6. Белов С.В. Пористые металлы в машиностроении. — М.: Машиностроение, 1981. — 248 с.
7. Бондаренко Н.Ф. Физика движения подземных вод. — Л.: Гидрометеиздат, 1973. — 216 с.
8. Бондаренко Н.Ф. Влияние межмолекулярных водородных связей на характер течения жидкости в капиллярах // Журн. физ. хим., 1968, Т. 42, No. 1, с. 248–256.
9. Вейль Г. Симметрия. — М.: Наука, 1968. — 191 с.
10. Воронин В.И. О нелинейной фильтрации жидкости через пористое полупространство со шпунтом при степенном законе сопротивления // Инж.-физ. журн., 1971, Т. 20, No. 4, С. 719–724.
11. Воронин В.И., Самохвалов В.В. О нелинейной фильтрации через пористый клин при наличии фазового превращения // Инж.-физ. журн., 1971, Т. 21, No 5, С.922–925.
12. Воронин В.И., Шитов В.В. Стационарное температурное поле при пористом охлаждении срезанного клина // Гидродинамика лопаточных машин и общая механика: Сб. тр. No 1. — Воронеж: Воронеж. политехн. ин-т, 1972, С. 126–136.
13. Воронин В.И., Фалеев В.В. О степенной фильтрации жидкости при наличии источников // Изв. АН СССР: Механика жидкости и газа, 1973, No 5, С. 91–96.
14. Ентов В.М. О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельным градиентом // Прикладная математика и механика, 1967, Т. 31, No 5, С. 820–826.
15. Ентов В.М. Об одной задаче фильтрации с предельным градиентом, допускающей точное решение // Прикладная математика и механика, 1968, Т. 32, No 3, С. 487–491.
16. Жуковский Н.Е. Полное собрание сочинений. — М.: Гл. ред. авиац. лит., 1937. — Т. 7, — 365 с.

17. *Иванов Т.Ф.* Исследование фильтрации газа (жидкости) при законе сопротивления, выраженном с помощью R -функции // Изв. АН СССР: Механика жидкости и газа, 1969, No 1, С. 77–82.
18. *Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. — М.: Машиностроение, 1975. — 384 с.
19. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971. — 576 с.
20. *Климонтович Ю.Л.* Критерии относительной упорядоченности открытых систем // Успехи физических наук, 1996, Т. 166, No 11, С. 1231–1243.
21. *Коллинз Р.* Течение жидкостей через пористые материалы. — М.: Мир, 1964. — 350 с.
22. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады АН СССР, 1941, Т. 30, No 4, С. 299–303.
23. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000. — 352 с.
24. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности. // Доклады АН СССР, 1944, Т. 44, No 8, С. 339–342.
25. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. — М.: Наука, 1972. — 376 с.
26. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — 538 с.
27. *Лейбензон Л.С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. — М.-Л.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1947. — 244 с.
28. *Мейсон Э., Малинаукас А.* Перенос в пористых средах: модель запыленного газа. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 200 с.
29. *Михайлов Н.В., Ребиндер П.А.* О структурно-механических свойствах дисперсных и высокомолекулярных систем // Коллоидн. журн., 1955, Т. 17, No 2, С. 107–112.
30. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика: Механика турбулентности. — М.: Наука. — Ч.1, 1965. — 640 с.
31. *Николаевский В.Н.* Конвективная диффузия в пористых средах // Прикладная математика и механика, 1959, Т. 23, Вып. 6, С. 1042–1051.
32. *Николаевский В.Н. и др.* Механика насыщенных пористых сред / Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. — М.: Недра, 1970. — 336 с.
33. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. — М.: Недра, 1984. — 323 с.
34. *Николаевский В.Н.* Гидромеханика и флюидодинамика. — М.: Недра, 1996. — 447 с.
35. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. / Пер. с англ. — М.: Иностранная литература, 1962. — 297 с.
36. *Павловский Н.Н.* Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения.— М.: Научно-мелиорационный институт, 1922. — 210 с.
37. *Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б.* Тепловая защита.— М.: Энергия, 1976.— 392 с.

38. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977. — 664 с.
39. *Поляев В.М. и др.* Гидродинамика и теплообмен в пористых элементах конструкций летательных аппаратов. / В.М. Поляев, В.А. Майоров, Л.Л. Васильев. — М.: Машиностроение, 1988. — 168 с.
40. *Попов В.И.* Реодинамика и теплообмен структурно-вязких жидкостей в ламинарном режиме (1889–1966) // Обзор научн. литер.: Сб. ст. Вып.4. — Новосибирск, 1970. — 256 с.
41. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1967. — 444 с.
42. *Пузыревская Т.Н.* Просачивание через песчаные грунты // Известия НИИГ, 1931, No 1, С. 69–82.
43. *Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М.: Наука, 1977. — 552 с.
44. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1972. — 440 с.
45. *Тарасевич Ю.Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. — М.: Эдиториал УРСС, 2002. — 112 с.
46. *Титчмарш Э.* Введение в теорию интегралов Фурье. — М.: Ком. книга, 2005. — 480 с.
47. *Трусов С.А., Тябин Н.В.* К теории течения шведовской или упругосжимаемой вязкопластической среды // Химия и химическая технология: Сб. тр. Вып. 16.— Волгоград: Волгоград. политехн. ин-т, 1968. — 147 с.
48. *Уилкинсон У.Л.* Неньютоновские жидкости. — М.: Мир, 1964. — 216 с.
49. *Федер Е.* Фракталы /Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. — 254 с.
50. *Христианович С.А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // Прикладная математика и механика, 1940, Т. 4, No 1, С. 33–38.
51. *Чаплыгин С.А.* Собрание сочинений. Т. 2. — М.–Л.: Гостехиздат, 1948, — 643 с.
52. *Шейдеггер А.Е.* Физика течения жидкостей через пористые среды. — М.: Гостехиздат, 1960. — 249 с.
53. *Швидлер М.И.* Статистическая гидродинамика пористых сред. — М.: Недра, 1985. — 288 с.
54. *Шитов В.В.* О пористом охлаждении полигонального симметричного клина с разрезом / Инж.-физ. журн., Т. 36, No 4, С. 746–747. —1979. — Деп. в ВИНТИ, No 3746–78.
55. *Шитов В.В., Москалев П.В.* О применении алгоритма Фосса в задачах моделирования процессов перколяции // Вестник Воронеж. гос. техн. универ. Сер. «Энергетика». Вып. 7.3. — Воронеж: Воронежск. гос. техн. универ., 2003. — С. 62–67.
56. *Шитов В.В., Москалев П.В., Чаплин Д.В.* О решении частной задачи нелинейной фильтрации в пористой среде // Инженерная физика, 2003, No 4, С. 21–27.
57. *Шитов В.В., Москалев П.В.* О модификации алгоритма Фосса при моделировании внутренней структуры пористой среды // Журн. техн. физ., 2005, Т. 75, Вып.2, С. 1–5.
58. *Шитов В.В., Москалев П.В.* Обобщение алгоритма Фосса в задачах моделирования стохастических самоафинных структур // Математиче-

- ские методы в технике и технологиях «ММТТ-18»: Сб. тр. междунар. научн.-техн. конф. Т. 2. — Казань: Казан. гос. техн. ун-т, 2005. — С. 163–166.
59. *Шитов В.В., Москалев П.В.* Статистическая оценка размерности реализаций стохастических фрактальных структур. // «Современные проблемы механики и прикладной математики»: Сб. тр. междунар. шк.-сем. Ч.2. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2005. — С. 207–211.
60. *Шитов В.В., Москалев П.В.* Статистический анализ фрактального броуновского движения. // Математические методы в технике и технологиях «ММТТ-19»: Сб. тр. междунар. научн.-техн. конф. Т. 1. — Воронеж: Воронеж. гос. технол. акад., 2006. — С. 43–48.
61. *Шульман З.П., Берковский Б.М.* Пограничный слой неньютоновских жидкостей. — Минск: ИТМО, 1966. — 352 с.
62. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988. — 251 с.
63. *Эфрос Д.А.* Исследование фильтрации неоднородных систем. — М.: Гостехиздат, 1963. — 253 с.
64. *Adler R.J.* The Geometry of Random Fields.— New York: John Wiley & Sons, 1981. — 292 p.
65. *Aker E., Måløy K.J., Hansen A.* A numerical study of capillary and viscous drainage in porous media. // Transworld Research Network, Trivandrum, India, 2000, Vol. 1, P. 19–40.
66. *Aker E., Måløy K.J., Hansen A., Batrouni G.G.* A two-dimensional network simulator for two-phase flow in porous media // Transport in Porous Media, 1998, Vol. 32, P. 163–193.
67. *Aker E., Måløy K.J., Hansen A.* Simulating temporal evolution of pressure in two-phase flow in porous media // Phys. Rev. E, 1998, Vol. 58, P. 2217–2242.
68. *Aker E., Måløy K.J., Hansen A.* Viscous stabilization of 2D drainage displacements with trapping // Phys. Rev. Lett., 2000, Vol. 84, P. 4589–4592.
69. *Alexandrowicz Z.* Critically branched chains and percolation clusters // Phys. Lett. A, 1980, Vol. 80, No. 4, P. 284–286.
70. *Arthur G.* Porosity and permeability changes during the sintering of copper powder // J. of the Inst. of Met., 1955, Vol. 83, No. 7, P. 329–336.
71. *Berry M.V., Lewis Z.V.* On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function // Proc. R. Soc. London. A, 1980, Vol. 370, P. 459–484.
72. *Birkhoff G.* Helmholtz and Taylor instability // Proc. Symp. Appl. Math., 1962, Vol. 13, P. 55–76.
73. *Birkhoff G., Kampé de Fériet J.* Kinematics of homogeneous turbulence. D. Metric transitivity // J. Math. Mech., 1962, Vol. 11, No. 3, P. 319–340.
74. *Broadbent S.R., Hammersley J.M.* Percolation process. // I. Crystals and Mazes. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, Vol. 53, P. 629–641.
75. *Brüning R., Morgenthal I., Andersen O., Ondruschka B.* Innovative Katalysatoren zur oxidativen Dehydrierung in der Gaphase-Metallische Kurzfasern // Chem. Ing. Tech., 2004, Vol. 76, No.6, P. 693–699.
76. *Bouligand G.* Ensembles impropres et nombre dimensionnel. // Bull. Sci. Math., 1928, Vol. 52, P. 320–344, 361–376.
77. *Carman P.C.* Fluid flow through a granular bed. // Trans. of the Inst. of Chem. Eng., 1937, Vol. 15, P. 150–167.

78. *Carman P.C.* Determination of the specific surface of powders. // *Int. J. Soc. Chem. Industr.*, 1938, Vol.57, P. 225–234.
79. *Carman P.C.* Flow of gases through porous media. — New York: Acad. Press, 1956. — 182 p.
80. *Childs E., Collis-George N.* The permeability of porous materials. // *Proc. Royal Soc., London, Ser. A.*, 1950, Vol.201, P. 392–405.
81. *Darcy H.* Les fontaines publiques de la ville de Dijon. — Paris: V. Dalmont éd., 1856, — 647 p.
82. *Darcy H.* Recherches expérimentales relatives au mouvement de L'eau dans les tuyaux. — Paris: Mallet-Bachelier, 1857. — 268 p.
83. *Deamer D.W.* The first living systems: a bioenergetic perspective. // *Microbiol. and Molecul. Biol. Rev.*, 1997, Vol. 61, No. 2. P. 239–261.
84. *Despois J.-F., Conde Y., San Marchi C., Mortensen A.* Tensile behavior of replicated aluminium foams. // *Adv. Eng. Mater.* 2004., Vol. 6, No. 6. P. 444–447.
85. *Dullien F.A.L., Chatzis I.* Modelling pore structure by 2 and 3-D networks with application to sandstones. // *J. Can. Petrol. Technol.*, 1977, Vol. 16. P. 97–108.
86. *Dullien F.A.L.* Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure. — New York: Acad. Press, 1979. — 308 p.
87. *Dullien F.A.L., Kwiecien M.J., Macdonald I.F.* Three-dimensional reconstruction of porous media from serial section data. // *J. Microscopy*, 1990, Vol. 159, P. 343–359.
88. *Dupuit J.* Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes. — Paris: Carilion-Goery et V. Dalmont éd., 1863.— 275 p.
89. *Einstein A.* Über die von der molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. // *Ann. Phys.* 1905, Vol. 14, P. 549–560.
90. Elsevier: Издательство научно-технической литературы [Электрон. дан.]. — Режим доступа: <http://www.elsevier.com>.
91. *von Engelhardt W., Tunn W.L.* The Flow of Fluids through Sandstones. // *Illinois State Geol. Surv., Circ.* 194. 1955. 16 p.
92. *Ergun S.* Fluid flow through packed columns // *Chem. Eng. Prog.*, 1952, Vol. 48, No. 2. P. 89–94.
93. *Ermakova M.A., Ermakov D.Yu., Kuvshinov G.C., Fenelonov V.B., Salanov A.N.* Synthesis of high surface area silica gels using porous carbon matrices // *J. of Porous Materials.*, 2000, Vol. 7. P. 435–441.
94. *Essam J.W.* Percolation theory // *Rep. Prog. Phys.*, 1980, Vol. 43, P. 833–912.
95. *Evans M., Hastings N., Peacock J.B.* Statistical Distributions. 3rd. ed.— New York: John Wiley & Sons, 2000. — 221 p.
96. *Fancher G.H., Lewis J.A.* Flow of simple fluids through porous materials. // *Ind. and Eng. Chem. Res.*, 1933, Vol. 25, No. 10. P. 1139–1147.
97. *Farmer J.D.* Information dimension and the probabilistic structure of chaos // *Z. Naturforsch.*, 1982, Vol. 37. P. 1304–1325.
98. *Fatou P.* Sur les équation fonctionnelles (première mémoire) // *Bull. de la Soc. Math. de France*, 1919, Vol. 47. P. 161–271.

99. *Fatou P.* Sur les équation fonctionelles (deuxième mémoire) // Bull. de la Soc. Math. de France, 1920, Vol. 48, P. 33–94.
100. *Fatou P.* Sur les équation fonctionelles (troisième mémoire) // Bull. de la Soc. Math. de France, 1920, Vol. 48, P. 208–314.
101. *Flory P.J.* Molecular size distribution in three-dimensional gelation. Part I–III // J. Am. Chem. Soc., 1941, Vol. 63, P. 3083–3100.
102. *Forchheimer P.* Wasserbewegung durch Boden. // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 1901, Vol. 45, P. 1781–1788.
103. Fragmentation form and flow in fractured media. Proceedings of the F³ Conference held at Neve Ilan /R. Englman, Z. Jaeger, eds. // Ann. Isr. Phys. Soc., 1986, Vol. 8, 628 p.
104. Fractals and Disordered Systems / Bunde A., Havlin S., eds. — 2nd edition. — New York: Springer, 1996.— 408 p.
105. *Furuberg L., Feder J., Aharony A., Jøssang T.* Dynamics of invasion percolation. // Phys. Rev. Lett., 1988, Vol. 61, P. 2117–2120.
106. *Gould H., Tobochnik J., Berrisford J.* An introduction to computer simulation methods. Applications to physical systems. — 2nd edition. — New York: Addison–Wesley, 1996. — 721 p.
107. *Grassberger P.* Generalized dimensions of strange attractors // Phys. Lett. A., 1983, Vol. 97. P. 227–231.
108. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors // Phys. Rev. Lett., 1983, Vol. 50, P. 346–349.
109. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // J. Phys. D., 1983, Vol. 9, P. 189–208.
110. *Grassberger P.* Spreading and backbone dimension of 2D percolation // J. Phys. A., 1992, Vol. 25, P. 5475–5484.
111. *Grassberger P.* Synchronization of coupled systems with spatiotemporal chaos // Phys. Rev. E, 1999, Vol. 59, P. R2520–R2522.
112. *Grassberger P.* Critical percolation in high dimensions // Phys. Rev. E, 2003, Vol. 67, P. 036101.
113. *Gunaratne G.H., Rajapaksa C.S., Bassler K.E., Mohanty K.K., Wimalawansa S.J.* A model for bone strength and osteoporotic fractures // Phys. Rev. Lett., 2002, Vol. 88, P. 068101–068105.
114. *Gunaratne G.H., Rajapaksa C.S., Mohanty K.K., Wimalawansa S.J.* A model for trabecular bone and an application to osteoporosis // J. Phys. A., 2002, Vol. 315, P. 98–104.
115. *Hammersley J.M., Handscomb D.C.* Monte-Carlo Methods.— London: Methuen & Co., 1964. — 107 p.
116. *Hausdorff F.* Dimension und äußeres Maß // Math. Ann., 1919, Vol. 79, P. 157–179.
117. *Hentschel H.G.E., Procaccia I.* The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // J. Phys. D., 1983. Vol. 8. P. 435–444.
118. *Hinrichsen H.* Nonequilibrium critical phenomena and phase-transitions into absorbing states // Adv. Phys., 2000, Vol. 49, P. 815–958.
119. *Hinrichsen H.* On possible experimental realizations of directed percolation // Braz. J. Phys., 2000, Vol. 30, No. 1, P. 69–82.

120. *van Hoof S.C.J.M., Minnery J.G., Mack B.* Dead-end ultrafiltration as alternative pre-treatment to reverse osmosis in seawater desalination: a case study // *Desalination*, 2001, Vol. 139, P.161–168.
121. *Hopf E.* A mathematical example displaying the features of turbulence // *Comm. Pure. Appl. Math.*, 1948, Vol. 1, P. 303–322.
122. *Hoshen J., Kopelman R.* Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm // *Rhys. Rev. B.*, 1976, Vol. 14, P. 3438–3445.
123. *Julia G.* Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. // *J. de Math. pures et Appl.*, 1918, Vol. 8, P. 47–245.
124. *Kampé de Fériet J.* Problèmes mathématiques posés par la mécanique statistique de la turbulence // *Proc. Intern. Congress Math.* — Amsterdam, 1956, — Vol.3, — P. 237–242.
125. *King F.H.* Principles and Conditions of the Movement of Ground Water // *U.S. Geol. Survey 19-th Ann. Rept.*, 1898, P. 2, P. 59–294.
126. *Kinzel W., Domany. E.* Directed Percolation in Two Dimensions: Numerical Analysis and an Exact Solution // *Phys. Rev. Lett.*, 1981, Vol. 47, P. 5–8.
127. *Kinzel W., Klein W.* Directed Percolation: Pseudo Correlation Length // *J. Phys. A.*, 1981, Vol. 14, P. L405–L411.
128. *Knudsen H.A., Hansen A.* A new relation between pressure and fractional flow in two-phase flow in porous media // *Phys. Rev. E.*, 2002, Vol. 65, P. 056310–056321.
129. *Kolmogorov A.N.* Wiener'sche Spiralen und einige interessante Kurven im Hilbertschen Raum C.R. // *(Doklady) Acad. URSS (N.S.)*, 1940, Vol. 26, P. 115–118.
130. *Kozeny J.* Über kapillare Leitung des Wassers im Boden. // *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien*, 1927, Vol. 136, P. 271–306.
131. *Krumbein W.C., Sloss L.L.* Stratigraphy and sedimentation.— San Francisco: W.H. Freeman, 1963. — 660 p.
132. *Leath P.L.* Cluster and boundary distribution near percolation threshold // *Phys. Rev. B.*, 1976, Vol. 14, P. 5046–5055.
133. *Lighthill J.* The recently recognized failure of predictability in Newtonian dynamics // *Proc. of the Royal Soc. A.*, 1986, Vol. 407, P. 5–50.
134. *Lorenz E.N.* Deterministic non-periodic flow // *J. Atmos. Sci.*, 1963, Vol. 20, P. 130–141.
135. *Mandelbrot B.B.* How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractal dimension // *Science*, 1967, Vol. 155, P. 636–638.
136. *Mandelbrot B.B., Van Ness J.W.* Fractional brownian motions, fractional noises and applications // *SIAM Rev.*, 1968, Vol. 10, No. 4. P. 422–437.
137. *Mandelbrot B.B.* Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence. — In: *Statistical Models and Turbulence / M. Rosenblatt and C. Van Atta, eds.* — New York: Springer, 1972. — P. 333–351.
138. *Mandelbrot B.B.* Intermittent turbulence in self-similar cascades: Divergence of high moments and dimension of the carrier // *J. Fluid Mech.*, 1974, Vol. 62, P. 331–358.
139. *Mandelbrot B.B.* Les objets fractals: forme, hasard et dimension.— Paris: Flammarion, 1975.— 192 p.

140. *Mandelbrot B.B.* The fractal geometry of nature.— New York: W.H. Freeman, 1977. — 461 p.
141. *Mandelbrot B.B.* Self-affine fractal sets.— In: *Fractal in Physics*.— Amsterdam: North-Holland, 1986.— P. 3–28.
142. *Mehr R., Grossman T., Kristianpoller N., Gefen Y.* Simple percolation experiment in two dimensions // *Am. J. Phys.* 1986, Vol. 54, P. 271–273.
143. *Meireles M., Clifton M., Aimar P.* Filtration of yeast suspensions: experimental observations and modeling of dead-end filtration with a compressible cake // *Desalination*. 2002, Vol. 147. P. 19–23.
144. *Moukarzel C., Duxbury P.M.* Comparison of rigidity and connectivity percolation in two dimensions // *Phys. Rev. E.*, 1999, Vol. 59, P. 2614–2622.
145. *Mualem Y.* A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media // *Water Resources Research*, 1976, Vol. 12, P. 513–522.
146. *Muskat M.* The flow of homogeneous fluids through porous media.— New York.: McGraw-Hill Book Co., 1937. — 763 p.
147. *Poincaré H.* Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. // *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1883, Vol. 97, P. 251–252.
148. *Queheillalt D.T., Katsumura Y., Wadley H.N.G.* Synthesis of stochastic open cell Ni-based foams // *Scripta Materialia*, 2004, Vol. 50, P. 313–317.
149. *Raffray A.R., Pulsifer J.E.* MERLOT: A model for flow and heat transfer through porous media for high heat flux applications // *Fusion Engineering and Design*, 2003, Vol. 65, No. 1, P. 57–76.
150. *Lord Rayleigh J.* On the pressure of vibrations // *Phil. Mag.*, 1902, Vol. 3, P. 338–346.
151. *Rényi A.* Probability theory.— Amsterdam: North-Holland, 1970. — 665 p.
152. *Reynolds O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels // *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1883, Vol. 174, P. 935–982.
153. *Roberts A.P., Garboczi E.J.* Elastic properties of model porous ceramics // *J. Am. Ceram. Soc.*, 2000, Vol. 83, No. 12, P. 3041–3048.
154. *Roberts A.P.* Statistical reconstruction of three-dimensional porous media from two-dimensional images // *Phys. Rev. E.*, 1997, Vol. 56, P. 3203–3212
155. *Rota G.-C.* Spectral theory of smoothing operators // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1960, Vol. 46, No. 6, P. 863–868.
156. *Roux S., Guyon E.* Temporal development of invasion percolation // *J. Phys. A.*, 1989, Vol. 22, P. 3693–3705.
157. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // *Comm. Math. Phys.*, 1971, Vol. 20, P. 167–192.
158. *Saltzman B.* Finite amplitude free convection as an initial value problem // *J. Atmos. Sci.*, 1962, Vol. 19, P. 329–341.
159. *Scaling phenomena in disordered systems.* / R. Pynn, A. Skjeltorp, eds. — New York: Plenum Press, 1985. — 592 p.
160. *Schwartzendruber D.* Non-Darcy behavior and the flow of water in unsaturated soils // *Soil. Sci. Soc. Amer. Proc.*, 1963, Vol. 27, No. 5. P. 323–334.
161. *Schroeder M.* Fractals, chaos, power laws: minutes from an infinite paradise. — New York: W. H. Freeman, 1991. — 520 p.

162. *Slichter C.S.* Theoretical investigation of the motion of ground waters. // U.S. Geol. Surv. Annu. Rep.— Washington: U.S. Gov. Print. Office, 1899. — P.2. — P. 295–384.
163. *von Smoluchowski M.* Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen // Ann. Phys., Leipzig, 1906, Vol. 21, P. 756–780.
164. *Stauffer D.* Scaling theory of percolation clusters // Phys. Res., 1979, Vol. 54, P. 1–74.
165. *Stockmayer W.H.* Theory of molecular size distribution and gel formation in branched polymers // J. Chem. Phys., 1943, Vol. 11. P. 45–55.
166. *Sullins A.D., Daryabeigi K.* Effective thermal conductivity of high porosity open cell nickel foam // 35th AIAA Thermophysics Conference.— Anaheim, CA: AIAA Paper No. 2001–2819. — 11 p.
167. *Theiler J.* Estimating the fractal dimension of chaotic time series // Lincoln Lab. J., 1990, Vol. 3, P. 63–86.
168. *Thompson A.H., Katz A.J., Rashke R.A.* Mercury injection in porous media: A resistance devil's staircase with percolation geometry // Phys. Rev. Lett., 1987, Vol. 58, P. 29–32.
169. *Virgin B., Haslund E., Hilfer R.* Rescaling relations between two- and three-dimensional local porosity distributions for natural and artificial porous media // J. Phys. A., 1996, Vol. 232, P. 1–20.
170. *Voss R.F.* Random fractal forgeries // Fundamental Algorithms in Computer Graphics. — Berlin: Springer-Verlag, 1985, — P. 805–835.
171. *Wei-Guo Y., Ruibao T.* Rapid algorithm for identifying backbones in the two-dimensional percolation model // Int. J. of Modern Phys. C., 2003, Vol. 14, No. 10, P. 1427–1437.
172. *Wiener N.* Differential space // J. of Math. and Phys., 1923, Vol. 58, P. 131–174.
173. *Wilkinson D., Willemsen J.F.* Invasion percolation: A new form of percolation theory // J. Phys. A., 1983, Vol. 16, P. 3365–3376.
174. *Wyllie M.R.J., Spangler M.B.* Application of electrical resistivity measurements to problems of fluid flow in porous media // Bull. Amer. Ass. Petrol. Geol., 1952, Vol. 36, P. 359–403.
175. *Wyllie M.R.J., Gardner G.H.F.* The generalized Kozeny–Carman equation — its application to problems of multiphase flow in porous media // World Oil Prod. Sect., 1958, April. P. 210–228.
176. *Ziff R.M.* Test of scaling exponents for percolation cluster perimeters // Phys. Rev. Lett., 1986, Vol. 56, P. 545–548.